UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

PROGRAMACIÓN ESTOCÁSTICA. APLICACIÓN A LA GESTIÓN DE ACTIVOS Y PASIVOS

UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

TESIS DOCTORAL PRESENTADA POR

FÁBIO SÍLVIO JOSÉ DE CARVALHO

BAJO LA DIRECCIÓN DE LOS DOCTORES

ANTONIO JOSÉ HERAS MARTÍNEZ

JOSÉ LUIS VILAR ZANÓN

MADRID 2018

AGRADECIMIENTOS

A los Directores de mi tesis doctoral, el profesor Dr. Antonio José Heras Martínez y el profesor Dr. José Luis Vilar Zanón, por haberme brindado los conocimientos necesarios y por su guía constante que ha resultado clave para la orientación definitiva de esta tesis doctoral, por la oportunidad, por la confianza que han depositado en mi, por el hecho de nunca les ha faltado una palabra solidaria de incentivo, por la amistad que me han brindado, gracias por todo.

A la Universidad Complutense de Madrid (UCM), en especial a la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales por la oportunidad que me dieron de tener el privilegio de haber cursado el programa de doctorado. También a todo el equipo del departamento Economía Financiera y Contabilidad I, por su simpatía y consejos para utilizar y consultar fuentes bibliográficas.

Al Profesor Dr Antonio Ocaña, por la forma en que me recibió cuando llegue por primera vez a España a la Facultad de Matemáticas para cursar el master en Investigación Matemática. A la Dra. Eva María del Pozo García, la primera persona con quien tramité el proceso de matrícula del doctorado, por su amabilidad y cariño.

Son muchas las personas que no aparecen aquí y que me han servido de ayuda incalculable en el desarrollo de este trabajo. Quiero decirles que aunque no figuren, todos ellos están en mis recuerdos y les agradezco sinceramente su colaboración.

DEDICATORIA

A Dios, por esa forma sobrenatural de

Manifestarse en mi vida como un todo....,

Por la fortaleza y la fe que me ha dado siempre

De manera sobreabundante y en particular en la

realización de la presente tesis doctoral .

A mis padres: Luis de Carvalho y Conceição de Carvalho y

mis hermanos Diogo de Carvalho, Luis junior de
Carvalho, Julio de Carvalho, Marcos de Carvalho.

Esperança de Carvalho y Navratilova Marques.

A mis tías: Joana Gaspar, Rosa Julio, en especial

a mi tía Luzia Julio que falleció en este año,

estés donde estés, todos te echamos de menos. por su

apoyo incansable, su comprensión en lo buenos y malos

momentos, y por no poder haberles dedicado todo

el tiempo que hubiese querido. Sé que este trabajo

colma de satisfacción y alegría a todos ellos,

por lo que se lo dedico muy especialmente

a todos ustedes.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

RESUMEN

En esta tesis usamos la técnica conocida como programación estocástica para la gestión de activos y pasivos de fondos de pensiones. Esta gestión se basa en técnicas de generación de escenarios, con énfasis en las incertidumbres de la rentabilidad y el valor final de los pasivos, en un plan de pensiones de contribución definida.

Se estudia un modelo especifico de un fondo de pensiones español, la estructura incluye variables estocásticas, variables de decisiones y un escenario generador, todos los cuales son de gran importancia en la toma de decisiones para los gestores. El modelo se formula como un problema estocástico de dos etapas en tiempo discreto y con un horizonte temporal anual, y se resuelve a través del software GAMS. Los experimentos computacionales presentados en esta tesis se llevan a cabo con datos reales de un pequeño fondo de pensiones, y se centran en los activos comprados, vendidos y retenidos.

La asignación del capital de inversión depende de los diferentes resultados del modelo para la rentabilidad de cada activo. La posición inicial del fondo de pensiones es muy importante para incluir en el modelo las normas de contabilidad y seguir el rastro del efectivo en el mercado financiero, así como para hacer la valoración del precio de compra y de venta de los activos.

Sabiendo de los problemas que surgieron con la última crisis mundial de 2008, el objetivo de esta tesis es presentar una mejor forma de gestión de los fondos de pensiones, que a nuestro entender es la mejor herramienta para gestionar fondos de pensiones en la actualidad. Su mayor ventaja es la posibilidad de predecir y controlar las incertidumbres, haciendo que los gestores cometan el menor número de errores posibles y ayudándolos a tomar la mejor decisión en cada momento.

ABSTRACT

In this thesis we use the stochastic programming for asset liabilities for pension fund management. This management is based on scenario generation techniques, with emphasis on the uncertainties of profitability and the final value of the liabilities in a defined contribution pension plan.

A specific model is applied in a Spanish pension fund; the structure includes stochastic variables, decisions variables and a scenario generator, which are of great importance in making decisions process for managers. The model is formulated as a stochastic problem in two stages with discrete time and an annual time horizon, and it is solved through the GAMS software. The computational experiments presented in this thesis are performed with real data related to a small pension fund, focusing on bought, sold and retained assets.

The allocation of capital investment depends on different model results for the profitability of each asset. The initial position of the pension fund is very important to include in the model accounting standards and for tracing of cash in the financial market and to make the valuation of the purchasing and selling price of assets.

Knowing the problems that arose in the last global crises in 2008, the objective of this thesis is to present a better way of managing pension funds which we believe is the best tool to manage pension funds in the present. Their biggest advantage is the prediction of uncertainties so that managers commit the fewest errors and help them make the best decision in every moment.

Keywords: pension fund, asset and liability management, scenario-based stochastic programming, case study.

INTRODUCCIÓN

Uno de los principales problemas de los fondos de pensiones es la gestión de sus activos y pasivos, debido a la necesidad de tener una liquidez para poder hacer frente a los pagos de las pensiones. La mejor manera de gestionar un fondo de pensiones es a través de políticas de inversiones con el objetivo principal de generar beneficios futuros, para hacer frente a sus obligaciones de pagos de los pasivos. Las principales características de este problema son las incertidumbres de los pasivos, el riesgo de falta de financiación, y las incertidumbres sobre la rentabilidad de los activos.

La Programación Estocástica es la mejor herramienta para resolver el problema de las incertidumbres. En esta tesis, su aplicación a la gestión de fondos de pensiones se lleva a cabo mediante un modelo matemático con variables aleatorias discretas, con un horizonte de planificación finito. El modelo nos permite predecir y gestionar las obligaciones futuras y la rentabilidad esperada.

Estos modelos son usados para resolver problemas de la vida real. Debido a la dimensión no trivial de los problemas estocásticos, estos problemas no podían resolverse hasta hace poco, pero con el avance de la tecnología de los ordenadores el problema se tornó más manejable, aunque todavía es necesario asumir algunas simplificaciones para obtener las soluciones de las incertidumbres.

Nuestra gestión debe cumplir una serie de condiciones. La primera es que el valor de los activos debe ser siempre suficiente para pagar todas los pasivos hasta la extinción del fondo. Es decir la diferencia entre el valor total de los activos y el valor total de los pasivos debe ser positiva, lo que significa que el fondo tiene solvencia. La segunda condición indica que el programa de inversión del fondo debe proporcionar dinero suficiente para pagar los activos corrientes, lo que significa que el nivel del efectivo debe ser siempre positivo.

(Zenios, 1995) . La aplicabilidad de la programación estocástica fue reconocida por primera vez por (Bradley & Crane , 1972), (Ziemba & Vickson , 1975).

Supondremos que los pasivos de un fondo de pensiones de prestaciones definidas pueden ser cubiertos mediante la inversión en una cartera de renta fija, y proponemos un modelo de programación estocástica para gestión de activos y pasivos de fondos de pensiones en España. Son muchos los artículos propuestos para gestión de activos y pasivos para fondos de pensiones, entre ellos destacaremos los siguientes: (Bradley & Crane , 1972); (Kalberg et all, 1981); (Zenios, 1995); (Cariño & Ziemba, 1998); (Jacek Gondzio, Roy Kouwenberg, 2001); (P. Hilli, 2007). Todos son artículos relacionados con la gestión de los riesgos de fondos de pensiones de cada inversión hasta un horizonte temporal.

El trabajo tiene cuatro capítulos. El primero se titula “Programación Estocástica”, y en él definimos los conceptos fundamentales, tales como programación estocástica, sistemas estocásticos, las etapas, escenarios y horizontes temporales. Presentamos después las técnicas para encontrar soluciones de los sistemas estocásticos, que constituyen la programación estocástica para dos y múltiples etapas. Terminamos el capitulo con los métodos de generación de escenarios de los sistemas estocásticos.

El segundo presenta aspectos generales sobre Pensiones y Fondos de Pensiones, se habla sobre los tipos de pensiones existentes en España, la legislación de los sistemas de pensiones y fondos de pensiones, el desarrollo de los fondos de pensiones y generalidades sobre la medida de riesgo $CVAR$.

En el tercero, nos centramos en los antecedentes sobre el tema, las mayores aplicaciones prácticas así como los beneficios obtenidos en estas aplicaciones. Presentamos también los modelos para indexación, bonos, activos y pasivos.

El cuarto, se titula “Resultados y Discusiones“. En él presentamos el modelo que usamos, los resultados dados por el modelo, y explicamos los resultados obtenidos en cada escenario, el resultado de las variables de decisión, la función objetivo, y los resultados de cada ecuación del modelo que hemos creado. También discutimos los resultados para los casos con y sin costes de transacción, y tratamos de hacer la comparación entre los resultados de las variables de decisión, de los resultados de cada ecuación del modelo y de la función objetivo, con y sin costes de transacción. La tesis finaliza con unas conclusiones y una bibliografía exhaustiva.

CAPÍTULO I

PROGRAMACIÓN ESTOCÁSTICA

En este capítulo comentaremos las principales ideas y aplicaciones de la programación estocástica. El capítulo está dividido en **seis secciones**. En la **primera sección** presentamos los conceptos básicos sobre programación estocástica que serán utilizados posteriormente. En la **segunda sección** comentamos los orígenes históricos de dicha técnica, en **la tercera** presentamos las formulaciones y planteamientos de los problemas lineales estocásticos de múltiples etapas, así como el problema de dos etapas. En la **cuarta sección** abordamos las etapas y horizontes, y en **la quinta** presentamos las técnicas de generación de escenarios por aproximación, en la **sexta y ultima** aclaramos la importancia de la información y nos centramos sobre todo en la fiabilidad de los datos.

1.1 Conceptos

Definición (Programación Estocástica)

La **programación estocástica** es la herramienta matemática que ofrece soluciones a los problemas formulados en sistemas estocásticos, donde el problema resultante es un problema matemático de optimización de dimensión no trivial.

El problema de optimización es un programa matemático en $\mathbb{R}^n$que tiene como objetivo maximizar o minimizar una función generalmente llamada función objetivo, sujeta a restricciones y con algunos de sus parámetros aleatorios. Que se formula de la siguiente forma:

(1.1) Maximizar $Z(x_1, \dots\dots, x_2)$ en un conjunto χ

donde el conjunto de soluciones factibles χ esta definido por sus limitaciones y restricciones de la siguiente forma :

$$\boldsymbol{\chi} = \{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{f_j}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{j} = \mathbf{1}, \cdots\cdots, \boldsymbol{p}, \ \ \boldsymbol{g_k}(\boldsymbol{x}) \leq \mathbf{0}, \boldsymbol{k} = \mathbf{1}, \cdots\cdots \boldsymbol{m}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\chi_0}\}.$$

Aquí las funciones $\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{f_j}, \boldsymbol{g_k}, \forall_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}}$ son funciones reales y χ_0 es un conjunto de condiciones específicas. La función Z es llamada función objetivo. Todas las funciones que intervienen pueden depender de parámetros, lo que dará lugar a programas estocásticos si algunos de los parámetros son aleatorios (Andras Prékopa , 1995). Los Programas Lineales surgen cuando $\boldsymbol{\chi} = \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ y todas las funciones $\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{f_j}, \boldsymbol{g_k}, \forall_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}}$ son lineales.

El Comité de Programación Estocástica (CPE) describió en 2011 a la programación estocástica como un enfoque para la modelización de problemas que involucran incertidumbre. Los modelos de programación pueden utilizarse para la toma de decisiones en múltiples etapas, donde cada decisión está adaptada a la información disponible (Roy Kouwenberg, 2001).

En un modelo de programación estocástica, las **etapas** se corresponden con los periodos de tiempo en los que se toman las decisiones, y el **horizonte** se refiere al máximo periodo temporal considerado. Asumimos que en cualquier etapa el número de estados del sistema es finito, y que dichos estados están perfectamente descritos en las **variables** (a menudo multidimensionales). En Programación Estocástica algunas de estas variables de estado están afectadas por la incertidumbre. Dado el estado inicial del sistema, el objetivo es maximizar o minimizar una función objetivo definida a partir de estas etapas y estados (Kall & Wallace, 1994).

Son muchas las aplicaciones de la programación estocástica, entre ellas destacan las siguientes.

1. Problemas de Economía y Finanzas.
2. Problemas relativos al diseño de los sistemas de generación de Energía.
3. Problemas de planificación de la producción de las Empresas.

Nuestro trabajo está encuadrado en la primera aplicación mencionada anteriormente, relativa a Economía y Finanzas. El objetivo central es usar la programación estocástica para Gestión de Activos y Pasivos de un Fondo de Pensiones. Definiremos las ecuaciones que caracterizarán los sistemas estocásticos que usaremos más adelante para obtener los resultados, y estudiaremos cómo evolucionan estos sistemas lineales estocásticos a lo largo del tiempo. Para resolver el problema lineal estocástico resultante, crearemos un modelo de programación matemática que se basa en maximizar una función objetivo sujeta a ciertas restricciones.

1.1.1 Procesos Estocásticos

Para comprender los conceptos y técnicas de la programación estocástica, es necesario previamente comprender el concepto de proceso estocástico, ya que la programación estocástica trata de resolver problemas estocásticos de dimensión no trivial. En términos intuitivos, un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias indexadas en el tiempo, donde cada variable aleatoria tiene su propia función de distribución.

Los procesos estocásticos tratan de modelar y estudiar cómo evolucionan los diferentes sistemas a lo largo del tiempo. Se pueden describir como una sucesión de variables aleatorias indexadas en el tiempo, que se denotan matemáticamente como $\{\boldsymbol{X_t}, \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}\}$, (Gordan Žitković, 2012).

La definición formal de proceso estocástico que vamos a usar será la siguiente:

Definición (Proceso Estocástico)

Dado el espacio de probabilidad $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{P})$, un proceso estocástico es una función

$$\boldsymbol{X_t} : (\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \boldsymbol{\mathcal{B}})$$
$$\boldsymbol{\phi} \quad \longrightarrow \boldsymbol{X_t}(\boldsymbol{\phi}) \in \mathbb{R}$$

tal que , para todo $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{T} \subset \mathbb{R}$ fijo, X_t es una variable aleatoria, $y\ \forall \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\Omega}\ \boldsymbol{fijo},$ $X_t(\phi)$ es una función que varía en el tiempo.

Definición (Conjunto Paramétrico)

Al conjunto $\boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{R}$ de subíndices se le denomina conjunto paramétrico, y puede ser continuo o numerable. Así estamos en condiciones de hacer una clasificación en procesos estocásticos de parámetro continuo o discreto.

Definición (Estado o Escenario)

Se denomina conjunto de estado E, al conjunto de los posibles valores que pueden tomar las variables $\{\boldsymbol{X_t}\}_{\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}}$. En general, se considera t como instante de tiempo y $\boldsymbol{X_t}$ como la posición o el estado del proceso estocástico en un tiempo determinado.

Es evidente que los problemas de programación estocástica se formulan en términos de procesos estocásticos. Un proceso estocástico, como ya hemos visto anteriormente, trata de estudiar la evolución de un sistema a lo largo del tiempo, y la mejor forma de describir estos sistemas estocásticos es mediante variables aleatorias. En términos prácticos, está claro que los gestores de las carteras de activos y pasivos deben tomar decisiones a lo largo del tiempo, y que el resultado de cualquier inversión es casi siempre incierto salvo el caso de los bonos de renta fija, e incluso estos están sujetos a riesgo en caso de quiebra del emisor (A. Shapiro, D. Dencheva and A. Ruszczynski, 2009).

La programación estocástica puede jugar un papel muy importante para ayudar a resolver los problemas de los gestores en la toma de decisiones, pues dando soluciones a los problemas estocásticos resultantes, se pueden obtener estimaciones de los posibles rendimientos futuros de una determinada operación financiera. El objetivo de los gestores siempre es obtener la máxima ganancia posible con el mínimo coste posible, y la programación estocástica es la herramienta matemática que ayuda al gestor en la toma de decisiones, sugiriendo los mejores momentos tanto para invertir como para retener el capital.

Trataremos de analizar los activos y pasivos de fondos de pensiones mediante programación estocástica, donde las incertidumbres serán modeladas como variables aleatorias, y se definirá una función objetivo que se tratará de optimizar bajo ciertas restricciones, creando un modelo para las inversiones financieras centrado en tres aspectos fundamentales, la compra, la venta y la posible retención.

Los principales problemas que surgen en la aplicación práctica de las técnicas de programación estocástica están relacionados con la dimensión de los problemas resultantes y con la capacidad de tratamiento de datos por parte de los ordenadores. Obviamente son necesarios ordenadores muy potentes para resolver los programas resultantes, de forma que para solucionar el problema de trazabilidad numérica lo que se hace es resolver el problema por aproximación mediante una adecuada generación de escenarios. Los aspectos de, trazabilidad, la construcción del modelo y la generación de escenarios serán abordados más detalladamente en las próximas secciones (Cariño & Ziemba, 1998).

1.2 PROGRAMACIÓN LINEAL ESTOCÁSTICA.

En general, en los problemas de optimización lineal estocástica se modelizan las incertidumbres como variables aleatorias, asignando adecuadamente las variables y los parámetros, y calculando las distribuciones de probabilidad de dichas variables aleatorias para obtener respuestas sobre el comportamiento de las inversiones. Finalmente, la representación se hace mediante programas lineales matemáticos.

La primera aplicación de la programación lineal estocástica para la gestión de una cartera de inversiones fue introducida por (Beale y Dantzig, 1955). El principal problema al que se enfrentaron fue que la dimensión de los sistemas estocásticos obtenidos era enorme, con una matriz de coeficientes muy grande, y de ahí surgió la necesidad de descomponer el problema en sub-problemas. Se originaron así las técnicas de descomposiciones (Dantzig, G. B. and Wolf , 1960), (Dantzig , VanSlyke , 1964), (Avriel y Williams , 1969), (Huang, Ertinsky y Ziemba , 1975), también denominadas de optimización matemática a gran escala.

A pesar de que este problema fue introducido y estudiado hace muchos años, debido a las limitaciones computacionales en aquel momento no se le dio mucha importancia a la programación lineal estocástica. La resolución de estos problemas solo fue posible gracias a los avances posteriores de la tecnología de los ordenadores. La posibilidad de resolver computacionalmente los problemas de optimización de tamaño muy grande devolvió el interés en la programación estocástica y provocó nuevos avances en su modelización matemática (Ermoliev, Yu. M. and A. I. Yastremki, 1979).

La bibliografía reciente de este tema es muy vasta, tal y como se puede comprobar consultando lo que aparece en los libros, (Wallace

,Ziemba, 2005), (Birge, Louveaux , 1997). Las publicaciones más recientes en el tema de Programación Lineal estocástica se pueden encontrar en Internet visitando la página de la Stochastic Programming Society (Sociedad internacional de Programación Estocástica), (http://stoprog.org/resources.php#textbooks, 2015). Se puede asimismo consultar la **International Conference on Stochastic Programming** (http://tucson.sie.arizona.edu/SPX), un congreso que se realiza cada tres años y que ya va por la décima segunda edición. También es interesante la recopilación bibliográfica acerca de problemas de optimización de programación estocástica que se encuentra en (http://tucson.sie.arizona.edu/SPX).

1.2.1 Métodos de solución de la Programación Lineal Estocástica

En la Programación Lineal Estocástica se consideran tres métodos principales para la formulación de los problemas de optimización, que se denominan método "**Aquí y Ahora"** o **"Here and Now",** método "**Esperar y Ver"** o **"Wait and See",** y el método del **Valor Esperado o "Expected Value".**

1. **"Esperar y Ver" o "Wait and See"**

En este método se asume que se tiene toda la información completa y además perfecta sobre las realizaciones de las variables aleatorias, es decir, que no existe incertidumbre, entonces la solución puede encontrarse calculando los valores óptimos de las funciones objetivo para cada posible realización de dichas variables.

Por ejemplo, consideremos el siguiente problema estocástico de minimización:

$$\textbf{(1.2)} \quad Z(\omega) = \min c(\omega)x$$

Sujeto a $\boldsymbol{x} \in \chi^{\omega}$, donde $\chi^{\omega} = \{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$

Resolveremos el problema calculando los valores óptimos de la función objetivo para cada posible realización del parámetro aleatorio ω. El valor esperado de la solución aplicando el método "**Esperar y Ver" o "Wait and See"** será Z_{WS}, definido por:

$$\textbf{(1.3)} \quad Z_{WS} = E[Z(\omega)] = \sum Z(\omega)p(\omega).$$

En la práctica aplicar el método **Esperar y Ver** o **"Wait and See"** implica resolver un gran número de problemas de optimización, lo que requiere mucho trabajo computacional. Por otra parte, en la vida real la información perfecta es difícil de conseguir, y es necesario estimar los valores de los parámetros aleatorios que sirven para dar una mejor respuesta a los problemas planteados en la práctica. Por tanto, esta técnica de solución es muy poco usada en la práctica, (Birge, Louveaux, 2011).

2. "Aquí y Ahora" o "Here and Now"

En este método se asume que no se conoce toda la información y que es necesario tomar una decisión antes de conocer las realizaciones de ω , y se trata de encontrar las funciones de distribución de las variables aleatorias, así como estimar los valores de algunos parámetros (como la media, varianza, etc.), antes que se realicen las variables aleatorias, con el objetivo de encontrar la mejor solución óptima posible del problema. Una vez estimados los valores de los parámetros tendremos la opción de saber cuál es la mejor decisión, que se denota por $\boldsymbol{Z_{HN}}$.

Ejemplo 2: Asumimos que alguien tiene la competencia de tomar las decisiones y denotemos estas decisiones por $\bar{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\xi})$ y los valores de la función objetivo por $z(\overline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi})$, así estamos en condiciones de calcular el valor esperado de la solución óptima, del método **"Aquí y Ahora" o "Here and Now",** también llamado problema de recurso. Este tiene la siguiente formulación matemática.

$$\textbf{(1.4)} \quad \boldsymbol{Z_{HN} = RP = \min_x \sum_{\xi}^{n} z(x, \xi)}$$

Este será el método usado en nuestra tesis por ser el que mejor se adapta en la práctica. Un ejemplo práctico de esta técnica es el problema estocástico de 2 etapas que será abordado en las siguientes secciones.

3. Valor Esperado o "Expected Value".

En esta técnica todas las variables aleatorias son reemplazadas por sus valores esperados, por lo que los problemas de programación estocástica se reducen a problemas de programación lineal. Denotaremos la solución por Z_{EV}, (Zenios, Ziemba , 2005). Y se define con la siguiente formula.

$$\textbf{(1.5)} \quad \boldsymbol{EZ_{WS} = EE[Z(\omega)]}.$$

1.2.2 Valor Esperado de la Información Perfecta "EVPI"

El método del Valor Esperado de la Información Perfecta (**EVPI)** se basa en calcular en primer lugar el valor óptimo de la función objetivo de la técnica **Aquí y Ahora o " Here and Now " (HN),** Z_{HN}. Como sabemos, con la técnica **"Here and Now"** se calcula la solución de un problema de optimización sin el conocimiento previo de las realizaciones de las incertidumbres. Las decisiones son tomadas todas en la primera etapa antes de cualquier realización de las variables aleatorias, las demás realizaciones dependen de las decisiones tomadas en la primera etapa, y las decisiones pueden ser cambiadas cuando los valores de las realizaciones no son los esperados. El **EVPI** se define como

$$\textbf{(1.6)} \quad EVPI = Z_{HN} - Z_{ws},$$

Donde Z_{ws} es la función objetivo del método **"Esperar y Ver" o "Wait and See"**, cuando tenemos la información perfecta sobre la realización de las variables aleatorias. **EVPI** representa el coste monetario que tendríamos que pagar para tener información completa (sin incertidumbre). De ahí que un pequeño **EVPI** implica poco ahorro de costes o incremento de beneficios debido a una mejor previsión, mientras que una gran **EVPI** implica que la previsión ofrece un ahorro significativo, (Birge, Louveaux, 2011).

El Valor Esperado de la Información Perfecta (**EVPI**), es positivo y está acotado entre 0 y la diferencia entre la expectativa del método del valor esperado (Z_{EEV}) y la función objetivo del método de Valor Esperado (Z_{EV}) . El intervalo se define de la siguiente manera:

$$0 \leq \text{EVPI} \leq Z_{HN} - Z_{EV} \leq Z_{EEV} - Z_{EV}$$

Con la siguiente relación

$$Z_{WS} \leq Z_{HN} \leq Z_{EEV}$$

Recordemos que $\boldsymbol{Z_{EV}}$ es la función objetivo del método del **Valor Esperado o "Expected Value"**, que se basa en sustituir las variables aleatorias por valores esperados, como hemos visto en la sección anterior. A su vez, $\boldsymbol{Z_{EEV}}$ es el valor esperado de $\boldsymbol{Z_{EV}}$, es decir, es el valor esperado obtenido usando la solución $\boldsymbol{Z_{EV}}$, y su objetivo es medir la performance de la decisión en la segunda etapa.

1.2.3 El Valor de la Solución Estocástica (VSS)

El Valor de la Solución Estocástica se define como la diferencia entre la expectativa de la solución del Método del Valor Esperado ($\sum \boldsymbol{Z_{EV}}$ *o* $\boldsymbol{Z_{EEV}}$) y el valor óptimo del método "Aquí y Ahora" ($\boldsymbol{Z_{HN}}$), y se escribe de la siguiente forma.

$$\textbf{(1.7)}\quad VSS = Z_{EEV} - Z_{HN}.$$

El Valor de la Solución Estocástica denotado por **(VSS)** se usa en situaciones en que no tenemos muchas informaciones sobre el futuro, esto es, a la hora de la toma de decisiones para conocer bien la eficacia de las soluciones de los modelos deterministas respecto a las soluciones de los problemas estocásticos, y analiza la performance midiendo precisamente si las decisiones tomadas son buenas o malas.

Tiene interés entender las implicaciones de los valores muy grandes o muy pequeños de $\boldsymbol{EVPI}$ y **(VSS)**, lo que requiere analizar problemas de programación estocástica reales. Para un análisis detallado de $\boldsymbol{EVPI}$ y **(VSS)** se puede consultar (Manne, 1974), donde hay ejemplos con $\boldsymbol{EVPI}$ muy pequeños, así como (H. P, Chao 1981), que elabora las condiciones para un $\boldsymbol{EVPI}$ pequeño, y (Birge, Louveaux, 2011), que presentan ejemplos con $\boldsymbol{EVPI}$ o **(VSS)** muy grandes.

Para un mejor entendimiento de los conceptos comentados, se presentan a continuación algunos ejemplos.

Ejemplo 3: Sea $\boldsymbol{\xi}$ una variable aleatoria que toma valores $\boldsymbol{\xi_i}$ y $\boldsymbol{\xi_2}$, con probabilidades $\boldsymbol{p_1, p_2}$ sea $\boldsymbol{\bar{\xi}=E[\xi] = 1/2}$ y sea $\boldsymbol{x}$ la variable de decisión. Consideremos el programa lineal estocástico recursivo.

$$\min 6x + 10E_{\xi}|x - \xi|$$
$$s.t\,, x \geq 0.$$

1. Consideremos el caso en que $\xi_1 = \frac{1}{3}, \xi_2 = \frac{2}{3}$, $p_1, p_2 = \frac{1}{2}$. Haciendo los cálculos correspondientes obtenemos $EVIP = \frac{2}{3}$ y $VSS = 1$. Observamos que la varianza es $Var(\xi) = \frac{1}{36}$.

2. Si $\xi_1 = 0, \xi_2 = 1$ y la probabilidad $p = \frac{1}{2}$. La varianza $Var(\xi)$ es ahora 9 veces más alta que en (3.1). Ahora obtenemos $EVPI = 2$ y $VSS = 3$, por lo que se comprueba que el valor de $EVPI$ se incrementa cuando la varianza se incrementa.

3. Consideremos el caso en que $\xi_1 = 0, \xi_2 = \frac{5}{8}$, con probabilidad $p_1 = 0.2$ y $p_2 = 0.08$, $\bar{\xi} = 0.5$. Ahora la $Var = \frac{1}{16}$, mayor que en (3.1) y se obtiene $EVPI = 2\, y\, VSS = 0$. Esto significa que en la solución óptima del problema se tiene que $\bar{\xi} = E_{\xi}$.

4. Consideremos ahora $\xi_1 = 0.4$, $\xi_1 = 0.8$ con $p_1 = 0.75$ y $p_2 = 0.25$. con $\bar{\xi} = 0.5$, ahora $\mathrm{Var}(\xi) = 0.03$, ligeramente mayor que en (3.1). Ahora observamos que el valor de $EVPI = 0.4\, y\, VSS = 1.1$. Con el resultado opuesto al de (3.3), es decir, decrecimiento de $EVPI$ y crecimiento de VSS.

Como se puede observar, es difícil en la práctica determinar el valor de $\boldsymbol{EVPI, VSS}$. Sin embargo, proporcionan información útil, ya que sirven para determinar si merece la pena buscar la solución estocástica. Si el valor de la solución estocástica es muy alto significa que ahorraremos en los costes y obtendremos una mayor rentabilidad empleando recursos para la búsqueda de la solución estocástica, mientras que si el valor de la solución estocástica es muy pequeño no merecerá la pena dicho cálculo.

El **VSS** es la medida de utilidad de un modelo en términos de la cantidad monetaria que se guarda teniendo en cuenta la naturaleza estocástica de las variables. Alternativamente, VSS da la posibilidad de incluir la condición de aleatoriedad en nuestro modelo, el intervalo de acotación tanto inferior como superior del Valor Esperado de la Solución Estocástica **(VSS)**. En (Birge, Louveaux, 2011) se demuestra que el valor de la solución estocástica **(VSS)** está limitado por:

$$\mathbf{0 \leq VSS \leq Z_{EEV} - Z_{EV}}.$$

1.3 Programación lineal estocástica basada en Escenarios

1.3.1 Formulación Matemática del Problema Estocástico con Múltiples Etapas

Nuestro modelo refleja un esquema de decisión que formularemos de la siguiente manera:

Para cada T −etapa del programa estocástico.

$$\boldsymbol{\omega = (\omega_1, \ldots\ldots, \omega_{T-1})} \textbf{ o } \boldsymbol{\omega = (\omega_1, \ldots\ldots \omega_T)}$$

Y el proceso de decisión $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \ldots\ldots, \boldsymbol{x_T})$.

Los x_t son vectores reales indexados en el tiempo t, mientras que los elementos aleatorios ω_t pueden ser de dimensión muy grande, y son vectores aleatorios reales. Las realizaciones de ω serán llamadas escenarios. Se llamará P a la distribución de probabilidad de ω y Ω a un conjunto finito de toda las realizaciones de ω. La secuencia de las decisiones y observaciones es, (Dučapova, J, 1995).

$$(1.8)\quad x_1, \omega_1 x_2, \omega_2, \dots \dots, x_{T-1}, \omega_{T-1}, x_T, \omega_T$$

El proceso de decisión es no anticipativo en el sentido de que las decisiones tomadas en cualquier etapa del proceso no dependen de realizaciones futuras del proceso de datos o de futuras decisiones, mientras que la información del pasado, así como el conocimiento de la distribución de probabilidad P de ω, sí son explotados. Asumimos que la distribución de probabilidad P es conocida y no depende de x. Denotaremos por $\boldsymbol{\omega^{t-1}} = (\boldsymbol{\omega_1}, \dots \dots, \boldsymbol{\omega_{t-1}})$ a la parte del proceso de datos estocásticos que precede la etapa t , y del mismo modo $\boldsymbol{x^{t-1}} = (\boldsymbol{x_1}, \dots \dots, \boldsymbol{x_{t-1}})$ a la que antecede a t. Así la toma de decisión de la etapa t es $\boldsymbol{x_t} = \boldsymbol{x_t}(\boldsymbol{x^{t-1}}, \boldsymbol{\omega^{t-1}}, \boldsymbol{P})$, (Dučapova, J, p. 2002).

El objetivo es minimizar (o maximizar) el valor esperado $\boldsymbol{Ef}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega})$, bajo las restricciones deterministas $\boldsymbol{x_t} \in \chi_t, \forall_t$ $(\chi_t \in \boldsymbol{R^n})$, $\boldsymbol{f_{1i}}(\boldsymbol{x_1}) \leq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}, \dots \dots, \boldsymbol{m_1}$ y con las limitaciones.

$$\boldsymbol{f_{ti}}(\boldsymbol{x^{t-1}}, \boldsymbol{\omega^{t-1}}, \boldsymbol{P}) \leq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}, \dots \dots, \boldsymbol{m_t}, \boldsymbol{t} = \boldsymbol{2}, \dots \dots, \boldsymbol{T}.$$

Que puede depender de decisiones anteriores u observaciones. Aquí $\boldsymbol{f_{ti}}, \forall_{t,i}$ son funciones lineales reales.

En la secuencia **(1.8)** asumiremos que todas las funciones son medibles con respecto a $\boldsymbol{\omega}$ y que existen todas las esperanzas matemáticas (esto es, sin duda, cierto si $\boldsymbol{\Omega}$ es un conjunto finito). Las relaciones que contienen elementos no aleatorios asumiremos que tienen probabilidad. Para simplificar la exposición supondremos también que todos los infinitos se alcanzan, por esa razón se escribirá mínimo (min) en lugar de ínfimo (inf). Esta suposición implica que los conjuntos definidos por las restricciones de $\boldsymbol{t}-$ esimas etapas, $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{1}, \dots \dots, \boldsymbol{T}$.

$$(1.9)\quad x_t \epsilon \chi: f_{ti}(x^{t-1}, x_t, \omega^{t-1}) \leq 0, i = 1, \dots\dots, m_t$$

Son no vacíos en todas las historias x^{t-1}, ω^{t-1}. Asimismo, la primera etapa de restricciones no depende de elementos aleatorios.

La fórmula (1.9) refleja el requisito de que la elección de las decisiones x_t no está limitada explícitamente por las decisiones y observaciones futuras. En general sin embargo, esto solo excluye la presencia de limitaciones inducidas, que se deben cumplir para garantizar la existencia de un proceso de decisión no anticipativo factible x. El problema estocástico correspondiente a las T −etapas es:

$$minEf(x_1, x_2, (x_1, \omega_3), \dots\dots, x_t(x^{T-1}, \omega^{T-1}, P), \omega)$$

Sujeto a $\quad x_t \in \chi_t, t = 1, \dots\dots, T$

$$(1.10)\quad f_{1i}(x_1) \leq 0, i = 1, \dots\dots, m_1$$

$$f_{ti}(x^{t-1}, \omega^{t-1}, P) \leq 0, i = 1, \dots\dots, m_t, t = 2, \dots\dots, T$$

Las realizaciones de ω_T , es decir, las que están detrás del horizonte temporal, no afectan al proceso de decisión, pero pueden contribuir en los costes generales observados, por lo que el proceso de decisión puede ser afectado por la distribución de probabilidad de ω_T .

La elección de la función f en (1.9) como una función indicador conduce a una función objetivo del tipo $P[g(x_1, x_2, \dots\dots, x_3, \omega)\epsilon I]$, donde I es el intervalo de los valores deseables de g. Del mismo modo, la introducción de esta condición en las restricciones de la t-esimas etapas proporciona la formulación de los problemas estocásticos con restricciones probabilísticas.

Es importante tener en cuenta que las etapas no necesariamente se refieren a periodos de tiempo, sino que pueden corresponder a los pasos en el proceso de decisión. El énfasis principal se hace en las decisiones de la primera etapa, que consisten en todas las decisiones que deben ser tomadas antes de cualquier información adicional, mientras que a las decisiones de la segunda etapa se les permite adaptarse a esta nueva información.

Se pueden definir varios esquemas similares de problemas estocásticos de $\boldsymbol{t}$-etapas de las ecuaciones (1.9) e (1.10) en una secuencia de problemas similares en $\boldsymbol{t}$-etapas, $\boldsymbol{t < T}$. Si ω_T no es considerado, las funciones objetivo son entonces definidas recursivamente como.

$$\boldsymbol{\psi_T(x^T, \omega^{T-1,\circ}) \equiv f(x, \omega)}$$

$$\textbf{(1.11)} \qquad \boldsymbol{\psi_t(x^T, \omega^{T-1}, P) = E_{\omega_t|\omega^{t-1},\circ}\{\min_{x_{t+1}} \psi_{t+1}(x^{t+1,\circ}, \omega^{t,\circ})\}}$$

$$\boldsymbol{t = 2, \ldots\ldots, t-1}$$

$$\boldsymbol{\psi_1(x_1) = E_{\omega_1} min \psi_2(x^2, \omega_1)}.$$

Por tanto, se plantean problemas de minimización con respecto a las restricciones en las $\boldsymbol{t}$-esimas etapas, donde el símbolo $\boldsymbol{E_{\omega|\omega^{t-1}}}$ denota el valor esperado con respecto a $\boldsymbol{\omega}$ condicionado por $\boldsymbol{\omega^{t-1}}$.

1.3.2 Solución Óptima del Problema Estocástico de Múltiples Etapas.

Definición: La región factible de un problema lineal es el conjunto de todas las soluciones que satisfacen todas las desigualdades del problema lineal (o restricciones), $\boldsymbol{R = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}}$. Se denomina **soluciones factibles** al conjunto de todas las soluciones que satisfacen todas las restricciones. Una solución factible se dice óptima si proporciona el valor más favorable de la función objetivo, esto es $\boldsymbol{x^*} \in \mathbb{R}$ es óptima si $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{cx^*} \geq \mathbf{cx}$ (donde c es el coste mencionado cuando definimos la función objetivo en la sección anterior).

Asumimos que la función objetivo $\boldsymbol{\psi_t}$ es convexa y acotada y la solución optima $\hat{x}^T$ del problema de $\boldsymbol{t}$-etapas está compuesta por soluciones óptimas de los problemas en las t-etapas. Es decir, si $\widehat{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{1}} \in \mathbf{arg}\, \boldsymbol{min}\, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}})$ verificando las limitaciones de la primera etapa $\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}} \in \chi$ **y** $\boldsymbol{f}_{\mathbf{1}\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}) \leq \mathbf{0}$ **,** $\boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \ldots\ldots, \boldsymbol{m}_{\mathbf{1}}$ **,** entonces podemos obtener la solución óptima de de $\widehat{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{1}}(\widehat{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{2}}, \boldsymbol{\omega})$ resolviendo un problema de minimización $\boldsymbol{min}_{\boldsymbol{x}_{\mathbf{2}}} \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{2}} \widehat{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{1}}(\widehat{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{2}}, \boldsymbol{\omega})$ con restricciones en la segunda etapa, (Dučapova, Hurt, Stepan, 2003). Y así sucesivamente.

Introduciendo una solución ficticia $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{T}+\mathbf{1}}$ que no influye en el valor de la función objetivo $\boldsymbol{f}$ estos resultados se pueden extender a problemas que incluyen $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{T}}$.

Como ejemplo, podemos considerar el siguiente problema lineal estocástico de múltiples etapas de minimización.

$$\mathbf{min}\, \boldsymbol{c}_{\mathbf{1}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x}_{\mathbf{1}} + \boldsymbol{E}_{\omega_1} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}, \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{1}})$$

(1.12)

Sujeto

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{1}} \boldsymbol{x}_{\mathbf{1}} = \boldsymbol{b}_{\mathbf{1}}, \ \boldsymbol{l}_{\mathbf{1}} \leq \boldsymbol{x}_{\mathbf{1}} \leq \boldsymbol{u}_{\mathbf{1}}$$

Donde definiremos la $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{t}-\mathbf{1}}$ recursivamente aprovechando la definición (1.11), donde $\boldsymbol{t} = \mathbf{2}, \ldots\ldots, \boldsymbol{T}$.

$$\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{t}-\mathbf{1}}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{t}-\mathbf{1}}, \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{t}-\mathbf{1}}, \boldsymbol{P}) = \min_{x_t} \left[\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{t}-\mathbf{1}}) \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{t}} + \boldsymbol{E}_{\omega_t | \omega^{t-1,\circ}} \{ \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{t}-\mathbf{1}}, \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{t}-\mathbf{1}}, \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{t}}) \} \right]$$

Sujeto a

(1.13)

$$\sum\nolimits_{\eta=1} \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{t}\eta}(\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{t}-\mathbf{1},\circ})\, \boldsymbol{x}_{\eta} + \mathbf{A}_{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{t}-\mathbf{1},\circ}) \boldsymbol{x}_{\eta} = \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{t}-\mathbf{1},\circ})$$

$$\boldsymbol{l}_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{t}-\mathbf{1},\circ}) \leq \boldsymbol{x}_{\mathbf{1}} \leq \boldsymbol{u}_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{t}-\mathbf{1},\circ})$$

Donde $\varphi_t \equiv 0$ o es una función dada de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{\omega}$.

Donde los $\boldsymbol{A_t}$´s son matrices de dimensión $\boldsymbol{m_t} \times \boldsymbol{n_t}$ dimensiones y los $\boldsymbol{b_t}$´s los vectores de las igualdades. Para la primera etapa los valores de todos los elementos son conocidos $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{u_1}$. La variable de decisión principal será x_1 que corresponde a la primera etapa. De acuerdo con nuestro ejemplo existe solución óptima para todo $\boldsymbol{t}$, y la solución óptima del problema (1.12) será $\boldsymbol{x^{t-1}}, \boldsymbol{\omega^{t-1}}$.

1.3.3 Programación Lineal Estocástica Basada en Escenarios

Para simplificar la exposición, asumimos que nuestro problema tiene solución factible y óptima, y que la función f es convexa, aprovechando la formulación de la sección anterior de la ecuación (1.12). Es decir $B_{t\eta} \equiv 0$ para $\boldsymbol{\eta \leq t-1}$, y supondremos $\boldsymbol{B_{t,t-1} \equiv B_t}$ la extensión generalizada en nuestro caso. Consideremos una familia de conjuntos disjuntos $\boldsymbol{d_t, t = 2, \dots\dots, T}$, e denotamos por $\boldsymbol{\hat{\omega}_{d_t}, d_t \in D_t}$ el conjunto de todas las realizaciones posibles de $\boldsymbol{\omega^{t-1}}$ denotados por los mismos índices d_t los valores correspondiente de los coeficientes de la t-eximas etapas. El número total de escenarios S es igual al número total de escenarios de D_t. Consideremos también que cada posible valor de nuestra riqueza está asociada a un escenario es decir, $\boldsymbol{\omega^S = \{\omega_1^S, \dots\dots, \omega_{T-1}^s\}}$ que genera una secuencia de coeficientes , $\boldsymbol{\{c_{d_2}, \dots\dots, c_{D_T}\}, \{A_{d_2}, \dots\dots, A_{D_T}\}, \{b_{d_2}, \dots\dots, b_{D_T}\}, \{l_{d_2}, \dots\dots, l_{D_T}\}, \{u_{d_2}, \dots\dots, u_{D_T}\}}$. Y asumiremos que nuestro vector $\boldsymbol{x(\omega^S) = \{x_1, \dots\dots, x_{D_T}\}}$ es el vector de soluciones factibles de los escenarios $\boldsymbol{\omega^S}$, (Dučapova, Hurt, Stepan, 2003).

El problema estocástico que presentamos tiene la siguiente forma, también llamada forma estándar del problema lineal estocástico basado en escenarios.

$$\begin{aligned}
&\min_{x_t}[c_t^T x_t + E_{\omega t}\varphi(x_t, \omega_t)] \\
&A_1 x_1 && = b_1 \\
&B_{d_2} x_1 + A_2 x_{d_2} && = b_{d_2} \\
&\quad B_{d_3}\, x_{d_2} + A_{d_3} x_{d_2} && = b_{d_3} \\
&\qquad \ddots \qquad \ddots \\
&\qquad\quad \ddots \qquad \ddots \\
&\qquad\qquad B_{D_T} x_{D_{T-1}} + \ B_{D_T} x_{D_{T-1}} && = b_{D_T}
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\varphi}$ es la función explicita de $\{\boldsymbol{x_1, \dots\dots, x_T}\}, \{\boldsymbol{\omega_1, \dots\dots, \omega_T}\}$ si la contribución de ω_T es considerada.

Ejemplo1: consideremos un árbol de escenarios con $t = 3$ etapas y un horizonte de planificación $T = 2$, lo que implica que tenemos 9 realizaciones $S = 9$, que son las siguientes, **(0,0),(1,1),(1,2), (1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2.5),(2,6),(2,7),(2,8),(2,9)**. Se genera la siguiente figura.

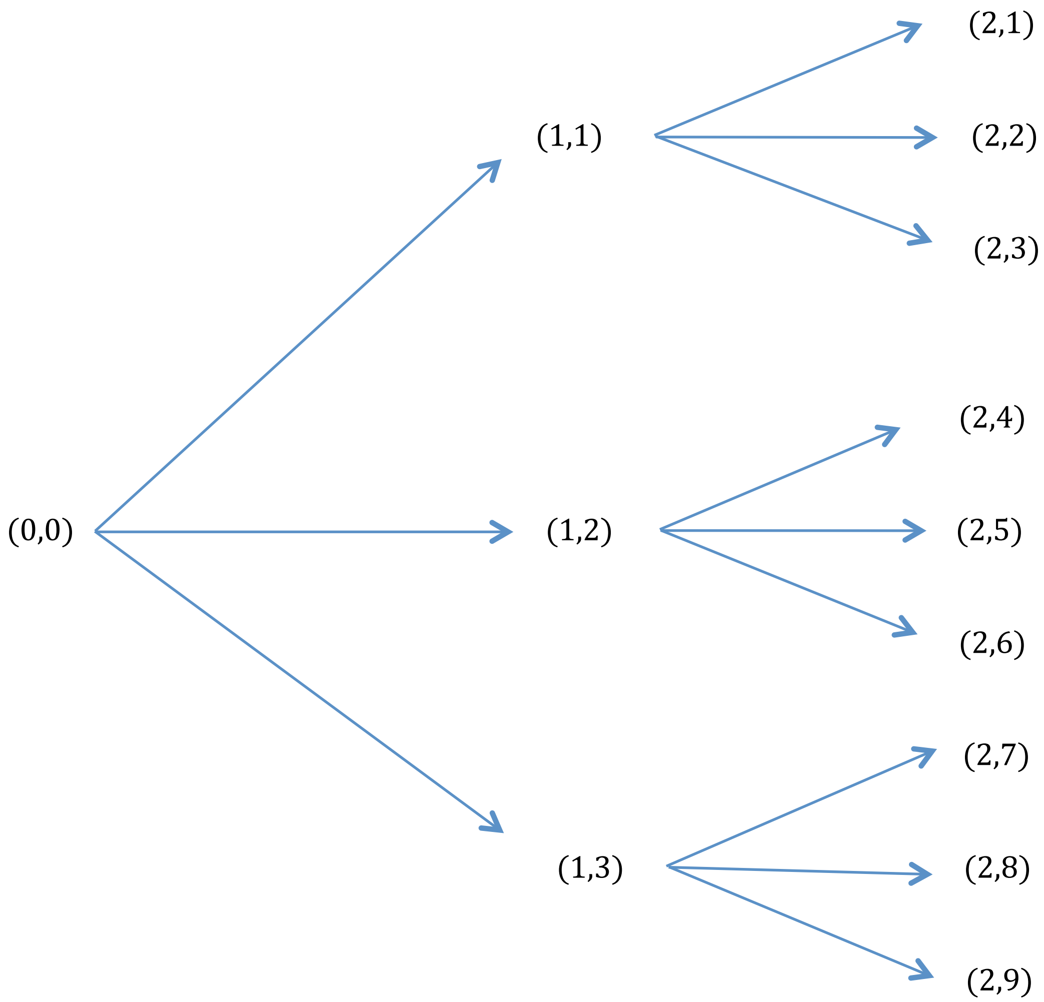

Figura 1: Árbol de Escenarios para el problema de 3 Etapas

1.3.4 Programación Lineal Estocástica de Dos Etapas

El problema lineal matemático de 2 etapas, también llamado bi-etapa, se puede representar de la siguiente forma, que es la forma estándar de un problema estocástico de dos etapas. Consideremos dos vectores $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}$ que representan las primeras y segundas etapas respectivamente y para $\boldsymbol{T} = \mathbf{2}$.

$$\text{(1.14)} \qquad \min\left(\boldsymbol{c}^{T}\boldsymbol{x_1} + \sum_{S=1}^{S} \boldsymbol{p}^{s}\boldsymbol{c}_2^{TS}\boldsymbol{x_2}\right)$$

$$\text{(1.15)} \qquad \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{A_1x_1} & & & & = \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{B}_1^1\boldsymbol{x_1} & + & \boldsymbol{A}_2^1\boldsymbol{x}_2^1 & & = \boldsymbol{b}_2^1 \\ \vdots & + & & \ddots & \\ \boldsymbol{B}_1^S\boldsymbol{x_1} & + & & \boldsymbol{A}_2^S\boldsymbol{x}_2^S & = \boldsymbol{b}_2^S \end{array}$$

$$\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \geq \mathbf{0}.$$

Donde $(\boldsymbol{c}_2^{TS}, \boldsymbol{A}_2^S, \boldsymbol{B}_1^S)$ son los coeficientes determinados por los escenarios $\boldsymbol{\omega}^S, \boldsymbol{S} = \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{p}^S \geq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{S} = \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{S}$, son las probabilidades, con $\sum_s \boldsymbol{p}^s = \mathbf{1}$. La decisión en la primera etapa se hace en $\boldsymbol{x_1}$, y se introducen restricciones para mantener la condición de linealidad $\boldsymbol{B}_1^S\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{b}_2^S$ compensando la discrepancia $\boldsymbol{b}_2^S - \boldsymbol{B}_1^S\boldsymbol{x_1}$ en $\boldsymbol{c}_2^{TS}\boldsymbol{x_2}$. Para mantener la condición de linealidad se utilizan diversas posibilidades modelando las matrices de recurso $\boldsymbol{A}_2^S$. Aquí consideraremos que los costes de problema de recurso es dado por la función $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{\omega}^S)$ son los costes mínimos alcanzables de compensación y que dependen de la decisión en primera etapa, y los escenarios considerados son definidos como valores óptimos de un problema auxiliar de la segunda etapa (Ziemba, W.T. and Mulvey, J, 1998).

$$\textbf{(1.16)} \quad \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{\omega^S}) = \mathbf{min}_{x_2^S}\{\boldsymbol{c_2^{TS} x_2}: \boldsymbol{A_2^S x_2^S} = \boldsymbol{b_2^S} - \boldsymbol{B_1^S x_1}; \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \geq \mathbf{0}\}$$

La suposición de recurso relativamente completo significa que el conjunto de soluciones es factible y no vacío, por lo tanto, es posible compensar las discrepancias para una solución de la primera etapa arbitraria $\boldsymbol{x_1} \in \boldsymbol{\chi}$ y todos los escenarios considerados. Los problemas de recursos fijos se refieren a matrices fijas $\boldsymbol{A_2^S} \equiv \boldsymbol{A_2}$ mientras que el recurso asume matrices dependientes de escenarios $\boldsymbol{A_2^S}$.Sustituyendo (**1.14) y (1.15) en (1.16)** podemos reescribir como.

(1.17)

$$\mathbf{min}\, \boldsymbol{c^T x} + \sum_{s=1}^{S} \boldsymbol{p^s}\, \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{\omega^S})$$

(1.18) En el conjunto $\boldsymbol{\chi} = \{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\}$.

Las ecuaciones **(1.17)-(1.18)** son un ejemplo de las formulaciones vistas anteriormente y calificadas como "**Aquí y Ahora**" o "**Here and Now**" $\boldsymbol{x^{HN}}$, que corresponden a la solución del problema de dos etapas. Ejemplo 2: Consideremos un problema arborescente con dos etapas $t = 2$, y horizonte de Planificación $T = 2$, de ahí obtenemos 4 realizaciones es decir $S = 4$. Tiene la siguiente figura.

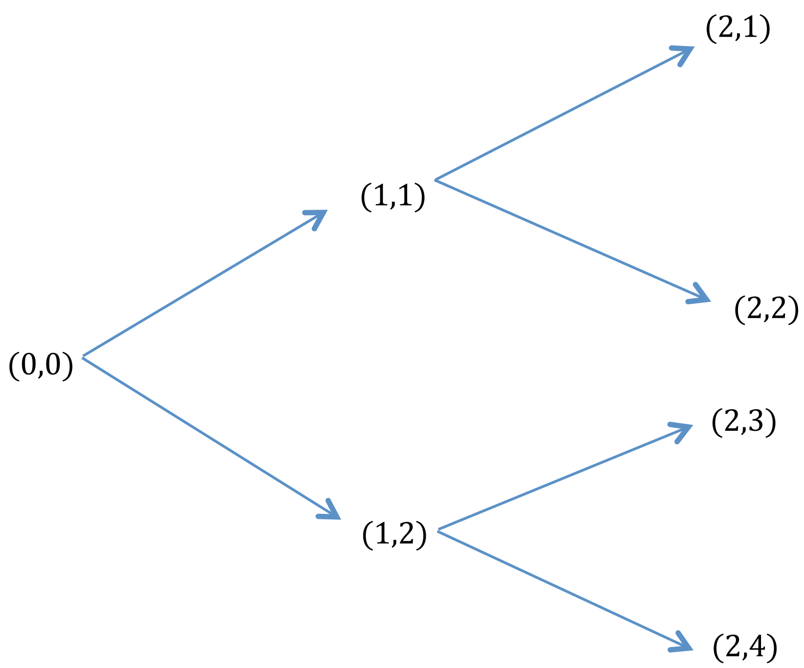

Figura 2: Árbol de Escenarios para el Problema de 2 Etapas.

Ejemplo3: Supongamos que queremos maximizar la rentabilidad de una cartera de inversiones que se presenta de la siguiente forma.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Z = max.} \quad & \boldsymbol{2x + y} \\
\boldsymbol{s.a} \quad & \boldsymbol{x + y \geq 1} \\
& \boldsymbol{x - 2y \geq 0} \\
& \boldsymbol{x - y \leq 1} \\
& \boldsymbol{x, y \geq 0}
\end{aligned}
$$

Debido a la complejidad de la resolución analítica de los problemas lineales se han desarrollado técnicas de resolución usando softwares como GAMS, MATLAB, MAPLE. Veamos el ejemplo hecho en GAMS.

```
* Maximizar la siguiente función que representa el
* retorno de una cartera de inversiones.
```

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Z = max.} \quad & \mathrm{2x + y} \\
\mathrm{s.a} \quad & \mathrm{x + y + s = 1} \\
& \mathrm{x - 2y + t = 0} \\
& \mathrm{x - y + u = 1} \\
& \mathrm{x, y, s, t, u \geq 0}
\end{aligned}
$$

Fase 1 : Planteamiento del problema de maximización en Gams

```
positive variables
X
y;

Equations

Objetivo
R1  primera Restricción
R2  segunda  Restricción
R3  tercera  Restricción;
```

```
VARIABLES
z funcion objectivo;


 objetivo ..
z=e=2*x+y;

R1..    x+y=G=1;
R2..    x-2*y=G=0;
R3..    x-y=L=1;


Model FABIO /R1,R2,R3, objectivo /;

solve  FABIO using LP maximizing  Z;
```

Fase 2: El código en el Gams.

```
* Maximizar la siguiente función que representa el
* retorno de una cartera de inversiones.
*dada de la siguiente forma

positive variables
x
y;

Equations
objectivo
R1 primera Restricción
R2  segunda   Restricción
R3  tercera  Restricción;

VARIABLES
z función objetivo;


 objetivo ..
z=e=2*x+y;

R1..    x+y=G=1;
R2..    x-2*y=G=0;
R3..    x-y=L=1;
```

Fase 3: El Codigo en Gams de las Restricciones

```


Model FABIO /R1,R2,R3, objetivo /;

solve  FABIO using LP maximizing  Z;
x
                (.LO, .L, .UP, .M = 0, 0, +INF, 0)
        1       R1
        1       R2
        1       R3
```

```
       -2       objetivo


---- y

y
               (.LO, .L, .UP, .M = 0, 0, +INF, 0)
        1       R1
       -2       R2
       -1       R3
       -1       objetivo

---- z  función objetivo

z
               (.LO, .L, .UP, .M = -INF, 0, +INF, 0)
        1       objective
```

Fase 4: Presenta el Valor de la variables de decisión

```
           Pre-triangular equations:   0
                    Post-triangular equations:  1


 ** Optimal solution. There are no superbasic variables.


 CONOPT time Total                            0.001 seconds
   of which: Function evaluations             0.000 =  0.0%
             1st Derivative evaluations       0.000 =  0.0%


                        LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- EQU R1              1.000     3.000     +INF       .
---- EQU R2               .         .        +INF     -3.000
---- EQU R3             -INF       1.000     1.000     5.000
---- EQU objetivo         .         .         .        1.000

  R1  primera Restricción
  R2  segunda   Restricción
  R3  tercera  Restricción

                        LOWER     LEVEL     UPPER    MARGINAL

---- VAR x                .        2.000     +INF       .
---- VAR y                .        1.000     +INF       .
---- VAR z              -INF       5.000     +INF       .


 z  función objetivo


**** REPORT SUMMARY :        0     NONOPT
                             0 INFEASIBLE
                             0  UNBOUNDED
```

```
EXECUTION TIME       =        0.016 SECONDS      2 MB  24.5.6
r55090 WEX-WEI
```

Fase 5: Resolución final en el Gams

Así se concluye que los valores de las variables buscadas son

$x = 2, y = 1, z = 5$

1.4 Etapas y Horizontes Temporales

A. Etapas

Para construir los programas estocásticos es necesario definir las etapas, dependiendo de la complejidad del modelo que se crea y de la dimensión del problema: cuanto mayor es esta última, mayor será el número de etapas, y cuanto menor es el problema menor será el número de etapas.

Se llama **Etapa** al número de fases o periodos del programa de optimización estocástica, que suele tener forma arborescente ya que trata de analizar el caso de optimización estocástica de etapas múltiples (o multi-etapas). En los casos de programas estocásticos muy extensos, las etapas se obtienen por aproximación teniendo en cuenta la trazabilidad numérica.

Las etapas en los programas de optimización estocástica son imprescindibles, pues nos ayudan a analizar cada fase del programa y a tomar la mejor decisión conforme se obtienen los resultados en cada fase, pudiendo hacer o no cambios, dependiendo del resultado de los parámetros y de las variables de decisión, para prevenir problemas futuros (R. C. Grinold , 1986).

B. Horizonte Temporal

Se entiende por **Horizonte Temporal** el intervalo de tiempo fijo finito (o infinito, dependiendo del problema que se estudia), que se espera que transcurra hasta alcanzar el objetivo. Generalmente se define como uno o varios años, pudiendo ser también meses o incluso en algunos casos semanas o días (R. C. Grinold , 1986).

Por la sección anterior sabemos que el problema estocástico crece exponencialmente. Supongamos que estamos ante un problema de 4 etapas con un horizonte temporal de 5 años, es decir, $T = 5 \; e \; t = 4$, entonces de ahí se deducen 4^5=1024 escenarios. En consecuencia, para un horizonte de 100 años y 10 etapas, obtendríamos un problema no trazable numéricamente, ya que con la tecnología de los ordenadores actuales no es posible solucionar este problema. En los años venideros, sin embargo, los avances tecnológicos permitirán resolver problemas estocásticos más extensos.

En algunas aplicaciones se han tomado horizontes temporales de hasta 30 años, pero con las restricciones tecnológicas y el problema del crecimiento exponencial de la complejidad de los programas estocásticas, incluso utilizando potentes softwares como es Gams, Matlab, Matemática, Maple, etc. y ordenadores con súper procesadores, la resolución suele durar varios días. Y utilizando ordenadores normales, el tiempo de espera puede ser superior a una semana.

En consecuencia, aunque la programación estocástica es la mejor herramienta para solucionar problemas de optimización estocásticas con numerosos escenarios a lo largo del tiempo, con las limitaciones tecnológicas actuales hay problemas que no se pueden resolver. Para minimizar esta limitación, se utilizan las técnicas de aproximación que serán descritas detalladamente en los próximos apartados.

1.5 Generación de Escenarios por Aproximación

Definiremos los escenarios como un conjunto de realizaciones de las variables aleatorias, que proporcionan asimismo realizaciones de la función que se pretende optimizar, la función objetivo. El objetivo de la generación de escenarios es solucionar aquellos problemas estocásticos en los que el crecimiento exponencial de la complejidad implica la imposibilidad de resolverlos analíticamente. En estos casos, se construye una secuencia de escenarios y un nuevo problema más simple, cuya solución aproximada es aceptable y está próxima a la solución del verdadero problema.

De un modo general, se asume que se conoce la distribución de probabilidad P de la variable aleatoria considerada. La información sobre P se obtiene de datos históricos y experiencias pasadas, así como de las ideas y opiniones de los expertos. El enfoque más habitual en optimización estocástica consiste en aproximar la verdadera distribución de probabilidad P por una distribución de probabilidad discreta, considerando así solamente un numero finito de escenarios.

Los escenarios se obtienen a través de una función de distribución de probabilidad aproximada, a través de un sistema de ecuaciones discreto de una muestra limitada, dependiendo de las restricciones de los reglamentos u otro problema que se pueda añadir, otras suposiciones por ejemplo de los expertos. Los escenarios aquí tratan de hacer la representación de las incertidumbres, (Ziemba, W.T. and Mulvey, J, 1998) .

Para tornar el problema manejable se necesita una buena precisión de la aproximación de la distribución de probabilidad P y el tamaño y el objetivo del problema aproximado de la distribución de probabilidad de P, que requiere una forma específica de entrada, un ejemplo es la forma arborescente en lo problemas de múltiples etapas. La generación de los escenarios debe reflejar la estructura del problema y la información disponible sobre la distribución de probabilidad subyacente, utilizando los datos históricos si los hay y reflejando la opinión de los expertos (Mulvey, J. M., and Simsek, K. D., 2002).

1.5.1 El Modelo de Vectores Autorregresivos

Una Serie Temporal $\boldsymbol{W_t}$ tiene una representación autorregresiva de primer orden, denotado por **(VAR)**, cuando es posible modelizarla a través de la ecuación

(1.19) $$\boldsymbol{W_t = \mu + A\omega_{t-1} + \varepsilon_t}.$$

Los parámetros $\boldsymbol{\mu, A, \Sigma}$, se estiman a partir de los datos históricos, adaptados a distintas fuentes de información. , $\boldsymbol{A}$- es la matriz obtenida de los datos histórico, $\boldsymbol{\mu}$- es la media, $\boldsymbol{\Sigma}$ es la varianza. Donde los valores propios de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{\varepsilon_t}$ son independientes y además estacionarios de modo que $|\boldsymbol{\lambda(A)}| < \mathbf{1}$.

$\boldsymbol{W_t}$, $\boldsymbol{\omega_{t-1}}$, son las realizaciones de las variables aleatorias consideradas como realizaciones de un proceso estocástico en los momentos del tiempo $\boldsymbol{t, t-1, t-2, \dots}$, que se caracterizan por $\boldsymbol{E(W_t) = E(\omega_{t-1}) = E(\omega_{t-2})} = \dots$ (un número finito).

ε_t- tiene distribución normal, es decir $\boldsymbol{\varepsilon_t \sim N(0, \Sigma)}$. La esperanza es nula, $\boldsymbol{E(\varepsilon_t) = 0}$.

La varianza de ε_t es constante, y además $\boldsymbol{E(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t+s}) = \sigma^2}$, $\forall \boldsymbol{s = 0}$

Las auto-covarianzas de ε_t son nulas $\boldsymbol{E(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t+s}) = 0}$ $\forall \boldsymbol{s \neq 0}$.

Los escenarios de $\boldsymbol{W_t^s}$ basados en el modelo de la ecuación **(1.19**) se construyen paso a paso, estimando los parámetros de la ecuación

$$\textbf{(1.20)} \qquad \boldsymbol{W_t^s = \hat{\mu} + A\omega_{t-1} + \hat{\varepsilon}_t^s}$$

Donde $\boldsymbol{\hat{\varepsilon}_t^s}$ se obtiene a partir de observaciones de $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\widehat{\Sigma}})$ o por técnicas de simulaciones. Del mismo modo, se pueden aplicar modelos econométricos, como modelos de **ARMA** con variables retardadas. Factores de análisis se pueden utilizar para obtener un número pequeño, denotaremos M los factores independientes de una sola dimensión $\boldsymbol{\phi_t^1}, \dots\dots, \boldsymbol{\phi_t^M}$ que la matriz de covarianza de $\boldsymbol{\hat{\epsilon}_t} = \boldsymbol{C_{\phi_t}}$ es la matriz aproximada de $\hat{\Sigma}$, donde Ces una matriz triangular inferior independiente del tiempo con uno en la diagonal principal. Y $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{CDC}'$, y $\boldsymbol{D}$ es una matriz diagonal única (Carvalho, 2012).

El modelo **VAR** resulta ser un modelo de fácil aplicación que proporciona excelentes resultados, debido la cantidad de datos disponibles de la distribución normal, en ese trabajo se utilizara la técnica autorregresiva para generación de escenarios.

1.5.2 El Modelo de Black-Toy-Derman

El modelo de Black-Toy-Derman (MBDT), presentado en 1990, es un modelo de tiempo discreto de uso frecuente dirigido a la generación de escenarios de tasas de interés. Su objetivo principal es proporcionar una herramienta para estudiar los precios de los bonos. El modelo se centra en tres aspectos.

1. Las tasas de interés son a corto plazo y se distribuyen de forma Normal Logarítmica, dependiendo solo del tiempo.

2. La aproximación binomial de la distribución normal $lnr(t)$ y la volatilidad de los tipos de interés dependen del tiempo t.

3. En el Modelo Binomial (Lattice), la tasa de interés a corto plazo puede moverse hacia arriba o hacia abajo, el par "**arriba-abajo**" y "**abajo-arriba**" se mueve de cualquier estado fijo en el instante de tiempo t y resulta el mismo valor de la tasa de interés a corto plazo en el instante de tiempo **t+2** (la propiedad de independencia de la ruta de acceso).

Como resultado, en cada punto del tiempo $\boldsymbol{t}$, hay $\boldsymbol{t+1}$ estados posibles y para el horizonte $\boldsymbol{T}$ hay $\boldsymbol{2^{T-1}}$ escenarios equiprobables. Cada uno de ellos puede ser representado por un vector con $t-1$ dígitos cero-uno (0-1), es decir.

$$\boldsymbol{\omega^S = \left(\omega_1^s, \omega_2^s, \dots \dots, \omega_{T-1}^S\right)^T}$$

Y la probabilidad de cada escenario es $\boldsymbol{p^s = 2^{-(T-1)}}$ $\forall s$. El número 1 corresponde en la $\boldsymbol{i}-$esima etapa a cualquier movimiento para "arriba", mientras que 0 corresponde a cualquier movimientos para "abajo", la tasa a corto de interés del primer periodo en la etapa t, corresponde al termino de la tasa a corto de interés para cada escenario S, para cada intervalo de tiempo $(\boldsymbol{t, t+1})$. Se escribe de la siguiente forma.

(1.21) $$\boldsymbol{\rho_t^s = r_{t_0} e_t^{it(s)}, i_t(s)}.$$

donde $\boldsymbol{i_t(s)} = \sum_{\tau}^{t} \boldsymbol{\omega_T^s}$.

$\boldsymbol{i_t(s)}$ es una realización de una variable aleatoria binomial, su valor es igual al número de movimientos hacia arriba para el escenario dado S que ocurren en puntos del tiempo $1, \dots \dots, t$. Véase la figura 3, para el Lattice de escenarios correspondiente al vector (1,0,0,10,1).

Las tasas interés básicas $\boldsymbol{r_{t_0}}$ y los factores de volatilidad $\boldsymbol{k_t}$ para todo $\boldsymbol{t}$ se calculan numéricamente de manera que la red binomial obtenida se ajuste a las curvas de rendimiento y volatilidad de los bonos del estado con cupón cero en fecha determinada; la entrada debe estar disponible para todos los vencimientos.

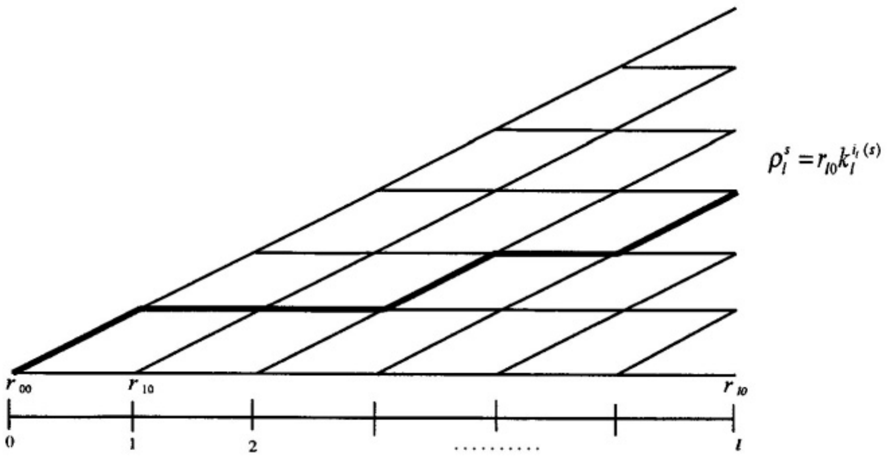

Figura 3: El modelo de Black-Toy-Derman

El modelo de Black-Toy-Derman es actualmente el modelo estándar que se usa en las aplicaciones de generación de escenario en la industria.

Los modelos estocásticos en tiempo continuo están representados en su mayoría por ecuaciones diferenciales estocásticas del tipo.

(1.22)

$$\boldsymbol{d\omega(t) = b\big(t, \omega(t)\big)dt + \sigma\big(t, \omega(t)\big)dW(t), \omega(0) = \omega_0, t \geq 0}$$

Donde W es un proceso de Wiener y los coeficientes $\boldsymbol{b\big(t, \omega(t)\big)}$, $\boldsymbol{\sigma\big(t, \omega(t)\big)}$ son funciones predeterminadas (Black, Derman, Toy, 1990) .

1.5.3 El Modelo de Vasicek

Este modelo fue presentado en 1977 por Vasicek, y se basa en la siguiente fórmula:

(1.23) $$d\omega(t) = b\big(k - \omega(t)\big)dt + \sigma dW$$

Donde b es una constante positiva que corresponde a la elección de $b\big(k, \omega(t)\big) = b\big(k - \omega(t)\big)$ y $\sigma\big(t, \omega(t)\big) = \sigma$. Se trata de un proceso estocástico del tipo Ornstein-Uhlenbeck. El modelo de Vasicek tiene la propiedad de "reversión a la media", siendo k el valor de equilibrio a largo plazo, aunque la varianza constante σ^2 hace que las trayectorias del proceso oscilen alrededor de k de manera continua y errática. Esto significa que, al contrario que el modelo de Black, Derman y Toy comentado en el apartado anterior, no se excluyen los valores negativos de $\omega(t)$.

Para aplicar el modelo a la generación de escenarios de tasas de interés, hay que estimar los parámetros y elegir un tiempo discreto $\Delta < 1/b$. Entonces tendremos

(1.24) $$\omega(n+1)\Delta = bk\Delta + \omega_{n\Delta}(1 - b\Delta) + \sigma\sqrt{\Delta}\varepsilon;\ n = 0, 1, \ldots.$$

Con un valor inicial dado arbitrariamente ω_0 y con ε independiente y con distribución normal $N(0,1)$.

Hay varias técnicas de modificación del modelo de Vasicek, considerando diferentes coeficientes $b\big(k - \omega(t)\big)$, $\sigma\big(t, \omega(t)\big)$, que proporcionan modelos unifactoriales. Pueden construirse modelos en tiempo continuo con más factores al considerar otras fuentes de incertidumbre, por ejemplo las posibilidades de impago de los bonos corporativos, la influencia de la inflación en los bonos indexados, el comportamiento aleatorio de la volatilidad, etc.

La ecuación diferencial estocástica puede incluir más de un factor, o varios procesos de Wiener independientes o correlacionados en lugar de uno solo. Eso ayuda a distinguir entre el comportamiento a corto plazo y a largo plazo, pudiendo también el proceso de Wiener ser sustituido por un proceso de Poisson para reflejar saltos discontinuos en la tasa de interés, etc (Vasicek, Oldrich A. , 1977).

1.6 Tratamiento de la Información

Como se ha comentado anteriormente, se asume que la función de distribución de probabilidad P es conocida, y se considera que pertenece a una familia paramétrica. La distribución de probabilidad P se obtiene a partir de los datos históricos, estimando los parámetros de la distribución de probabilidad, y la estimación de estos parámetros depende de la elección del modelo de generación de escenarios que se calcula a través de un problema discreto o por aproximación. Este tipo de problema de programación estocástica aparece generalmente en las áreas de Finanzas e Industrias.

Los procesos estocásticos que analizan datos históricos de cotizaciones de activos financieros permiten modelizar el precio y rentabilidad de los activos usando series temporales, tanto continuas como discretas. La situación más habitual considera un proceso estocástico que calcula los posibles valores de la variable que se pretende cuantificar (ω), es decir, el conjunto de todos los posibles valores de (ω), que como ya sabemos son llamados escenarios.

Los modelos de generación de escenarios fracasan si no existe una gran cantidad de datos fiables, porque no se podrá encontrar la función de distribución de probabilidad, lo que nos impedirá el cálculo del conjunto de todas las realizaciones de (ω) y torna imposible el cálculo de la función objetivo. En estas circunstancias solo podremos basarnos en las previsiones de los expertos para determinar los escenarios y sus probabilidades, lo que complica sacar conclusiones fiables sobre el valor óptimo del verdadero problema. En cualquier caso, este procedimiento solo es necesario cuando estamos en condiciones de bajo nivel de información.

En la mayor parte de los casos, para la aplicación de las técnicas mencionadas es necesario un nivel de información adecuado y es aconsejable usar toda la información que hay disponible y mezclarla con las opiniones de los expertos para que el modelo pueda hacer las mejores predicciones posibles a la hora de la toma de decisiones. Es aconsejable la recolección de diferentes niveles de información en diferentes intervalos de tiempo, aprovechando también el registro de los datos.

Como ejemplo en la práctica podemos considerar la gestión de diferentes carteras de valores, que requieren diferentes tratamientos para los depósitos, activos y pasivos, y son influenciados por diferentes valores externos tales como las tasas de mortalidad. Para la gestión de un plan de pensiones de una compañía de seguros por ejemplo, los factores relativos al mercado de bonos son descritos por un modelo de tasas de interés, los requisitos básicos de los pagos de primas y pensiones, gracias a la gran cantidad de datos demográficos mientras que la incertidumbre se relaciona con las futuras preferencias de los clientes.

La disponibilidad y calidad de la información es un requisito muy importante a la hora de trabajar en programación estocástica, siendo imprescindible para conseguir buenas estimaciones de los parámetros relevantes como la media, varianza, las matrices de covarianzas, las asimetrías de la distribución de probabilidades, etc. Un bajo nivel de información creará dificultades para calcular las estimaciones de los parámetros, así como para estimar medidas de tendencias estadísticas. En nuestro trabajo asumimos que conocemos gran cantidad de datos, que nos permiten calcular la distribución de probabilidad y hacer las estimaciones de los parámetros.

CAPITULO II

ASPECTOS GENERALES SOBRE PENSIONES

Y FONDOS DE PENSIONES

2.1 Pensiones

Se denomina **Pensión** a una prestación temporal o vitalicia que recibe una determinada persona, en una situación establecida por la ley vigente en cada país, que reemplaza al sueldo en caso de jubilación, muerte o invalidez, a partir de una edad acordada.

Las pensiones se dividen en los dos tipos siguientes:

1. **Pensiones Contributivas.**
2. **Pensiones No Contributivas.**

1. Pensiones Contributivas

Son prestaciones económicas que reciben determinadas personas, proporcionales a las cotizaciones por los sueldos de los trabajadores y con efectos diferentes según se deriven de enfermedad común o profesional, o bien de accidente no laboral o laboral.

Existen varios tipos de **pensiones contributivas**, entre las que destacan las siguientes.

1.a) Pensión de jubilación por vejez.
1.b) Pensión de viudedad.
1.c) Pensión para compañeros permanentes.
1.d) Pensión de orfandad.
1.e) SOVI.
1.f) Incapacidad Permanente.

1.a) Pensión de Jubilación por Vejez.

Es la remuneración que se paga a un individuo con el objetivo de cubrir la pérdida de ingresos, a partir de una edad acordada, cuando finaliza su vida laboral, tanto si trabaja por cuenta ajena o por cuenta propia.

1.b) Pensión de Viudedad

Es la pensión que se paga con la finalidad de compensar la carencia de ingresos del cónyuge superviviente, como consecuencia del fallecimiento del otro cónyuge.

1.c) Pensión para compañeros permanentes

Es similar a una pensión de viudedad, cuando no existe relación matrimonial.

1.d) Pensión de orfandad.

Es la pensión que se paga a los hijos del fallecido que participa en el sistema de pensiones. Este pago se hace hasta que los hijos alcanzan una cierta edad especificada a priori.

1.e) SOVI.

Es la pensión del ya desaparecido Seguro Obligatorio de Vejez e Invalidez, para personas que no tienen derecho a una pensión del actual sistema de la Seguridad Social, pero que deben cumplir unos requisitos determinados, como haber cotizado antes del 1967.

1.f) Incapacidad Permanente.

Es la pensión que se paga a una persona con capacidad laboral disminuida o anulada.

Las pensiones Contributivas se resumen en la siguiente tabla, con las respetivas cantidades mínimas pagadas en España.

Clase de pensión (Cuantías mínimas)	Con cónyuge Cargo		Con cónyuge no a cargo		Unidad económica Unipersonal l	
	Mensual	Anual	Mensual	Anual	Mensual	Anual
Titular con 65 años	784,90	10.988,60	603,50	8.449,00	636,10	8.905,40
Titular menor de 65 años	735,70	10.299,80	562,30	7.872,20	595,00	8.330,00
Incapacidad permanente						
Gran invalidez	1.177,40	16.483,60	905,30	12.674, 20	954,20	13.358,80
Absoluta	784,90	10.988,60	603,50	8.449,00	636,10	8.905,40
Total: Titular con 65 años	784,90	10.988,60	603,50	8.449,00	636,10	8.905,40
Total: Titular con edad entre 60 y 64 años	735,70	10.299,80	562,30	7.872,20	595,00	8.330,00
Total: Derivada de enfermedad común menor de 60 años	395,60	5.538,40	55% base mínima cotización régimen general		395,60	5.538,40
Parcial del régimen accidentes de trabajo Titular con 65 años	784,90	10.988,60	603,50	8.449,00	636,10	8.905,40
Viudedad						
Titular con familiares cargos					735,70	10.299,80
Titular con 65 años o con discapacidad en grado igualo superior al 65%					636,10	8.905,40
Titular con edad entre 60 y 64 años					595,00	8.330,00
Titular menor de 60 años					481,60	6.742,40
Orfandad						
Por beneficiario					194,30	2.720,20
En la orfandad absoluta el mínimo se incrementará en 6.742,40 euros/año distribuidos, en su caso, entre los beneficiarios						
Por beneficiario discapacitado menor de 18 Años en un grado igual o superior al 65%					382,40	5.353,60
En favor de familiares						
Por beneficiario						
Si no existe viudo ni huérfano pensionista					194,30	2.720,20
Beneficiario único con 65 años					469,70	6.575,80
Beneficiario único menor de 65 años					442,50	6.195,00
Varios beneficiarios El mínimo asignado a cada uno se incrementará en el importe que resulte de prorratear 4.022,20 euros/año entre el número de beneficiarios						
SOVI (Cuantía máxima)						
Vejez, Invalidez y Viudedad					407,00	5.698,00
Prestaciones SOVI concurrentes					395,20	5.532,80

Tabla 1: Resumen de las Pensiones Contributivas,(www.seg-social.es, 2015).

2. Pensiones No contributivas.

Son pagos periódicos vitalicios o de duración determinada, dependiendo del tipo de pensión, en favor de aquellas personas que no hayan cotizado el tiempo suficiente para alcanzar prestaciones de nivel contributivo por la realización de sus actividades profesionales.

- 2.a) Pensión por Invalidez.
- 2.b) Pensión a favor de familiar.
- 2.c) Pensión Lismi (LGD).

2.a) Pensión por Invalidez.

Es la pensión que se paga a una persona con discapacidad igual o superior a sesenta y cinco por ciento (≥ 65). La misma debe probar su discapacidad con un informe médico detallando el grado de discapacidad y si depende de terceras personas para efectuar las tareas básicas del día.

2.b) Pensión a Favor de Familiar

Es la prestación económica que se concede aquellos familiares que hayan convivido y dependido económicamente de la persona fallecida y que reúnan los requisitos exigidos.

2.c) Pensión Lismi (LGD).

Es la pensión que se paga a una persona con un grado de muy elevada discapacidad, pudiendo o no depender de una tercera persona para realizar cualquier tipo de tareas. LISMI es la abreviatura de la Ley de Integración Social de Personas Minusválidas, modificada por el decreto ley 27/2000 de la LGD o Ley General de Discapacidad.

Al igual que para las pensiones contributivas, presentamos una tabla que resume todas las pensiones no contributivas existentes en España, con sus correspondientes cuantías mínimas, especificando también los requisitos y la compatibilidad, que varía de acuerdo al tipo de pensión.

TIPO DE PENSIÓN	REQUISITOS	CUANTÍA	COMPATIBILIDAD
INVALIDEZ (1)	✓ Mayor 18 años ✓ > 65% de disminución. ✓ Ver límite de recursos. ✓ Residentes en territorio español.	**367,90** Euros/mes con dos pagas extras. **551,85** Euros/mes con dos pagas extras (75% con 3ª persona)	✓ Incompatible con pensiones asistenciales, la LISMI, el subsidio por 3ª persona de la LISMI y prestación por hijo a cargo. ✓ Compatible con el Trabajo
PRESTACIÓN FAMILIAR POR HIJO A CARGO MENOR DE 18 AÑOS	✓ Menor 18 años. ✓ A partir del 33% de disminución. ✓ No existe límite de ingresos. ✓ - Convivir con padres o tutores.	**1.000**Euros/anuales	
PRESTACIÓN FAMILIAR POR HIJO A CARGO MAYOR DE 18 AÑOS (2).	✓ Mayor 18 años. ✓ ≥ 65% de disminución. ✓ No existe límite de ingresos. ✓ - Convivir con padres o tutores.	✓ Entre 65% -75%: **367,90** Euros/mes ✓ Más 75% con 3ª persona: **551,90** Euros/mes. - Sin pagas extras	✓ Compatible con matrimonio. ✓ Compatible con pensión de orfandad. ✓ Compatible con el trabajo.
LISMI-AYUDA INGRESOS MÍNIMOS	✓ Más 18 años. ✓ Más 65% disminución. ✓ Sin límite de ingresos.	**149,86** Euros/mes con dos pagas extras	✓ Incompatible con otras pensiones. ✓ Incompatible con trabajo. ✓ No se admiten nuevas solicitudes.
LISMI - AYUDA POR 3ª PERSONA	✓ Más 18 años. ✓ + 75% y justificar la necesidad de 3ª persona. ✓No límite ingresos	**58,45** Euros/mes con dos pagas extras	✓ Compatible con trabajo. ✓ Incompatible con otras pensiones. ✓ No admiten nuevas solicitudes
LISMI - AYUDA MOVILIDAD Y GASTOS DE TRANSPORTE	✓Ingresos económicos hasta 70% del IPREM	**63,30** Euros/mes sin pagas extras	✓Compatible con pensión no contributiva por invalidez y pensión familiar de hijo a cargo. ✓ Compatible con el trabajo.

Tabla 2: Listado de Pensiones no Contributivas y Cuantías Mínimas Pagadas (http://www.ecom.cat/pdfRecursos/Ecom_recursos_188.pdf, 2016).

2.2 Planes de Pensiones

Definición (Planes de Pensiones)

Conjunto de normas genéricas establecidas que, junto con la legislación vigente en cada momento, determinan los derechos de las personas en cuyo favor se constituyen, a percibir rentas o capitales por jubilación, supervivencia, incapacidad permanente, dependencia severa o gran dependencia del partícipe, así como las obligaciones de contribución a los mismos (Artículo 1 del Real Decreto Legislativo 1/2002, de 29 de noviembre, por el que se aprueba el Texto Refundido de la Ley de Planes y Fondos de Pensiones, en adelante Ley de Planes y Fondos de Pensiones), (www.seg-social.es, 2002).

Los Planes de Pensiones se constituyen voluntariamente. Las prestaciones de los planes tienen carácter privado y son complementarias (nunca sustitutivas) de las que, en su caso, se tuviera derecho a percibir de la Seguridad Social.

Los **Planes de Pensiones** se caracterizan de la siguiente forma:

•**Sujetos constituyentes**

- **Promotor del Plan:** cualquier empresa,sociedad, entidad, corporación, asociación o sindicato que promueva su creación o participe en su desarrollo.
- **Partícipes:** personas físicas en cuyo interés se crea el plan con independencia de que realicen o no aportaciones.

•**Beneficiarios**: las personas físicas con derecho a la percepción de prestaciones, hayan sido o no partícipes.

2.2.1 Tipos de Planes de Pensiones

Hay dos clasificaciones destacadas de los planes de pensiones:

2. Planes de pensiones según el promotor
3. Planes de pensiones según sus obligaciones

1. Planes de Pensiones según el Promotor

Los Planes de Pensiones, según el promotor, tienen las siguientes modalidades*:*

1a) Planes de Pensiones del Sistema de Empleo. Son aquellos cuyo promotor es cualquier entidad, corporación, sociedad o empresa y cuyos participes son los empleados de la entidad, incluidos los que tienen una relación laboral de carácter especial como los altos directivos.

Ejemplo: El Plan de Pensiones de empleados de Telefónica de España.

1b) Planes de Pensiones del Sistema Asociado

Son aquellos cuyo promotor o promotores son cualesquiera asociaciones o sindicatos, siendo los participantes sus asociados, miembros o afiliados.
Ejemplo: El Plan de Pensiones asociado a la "UGT".

1c) Planes de Pensiones del Sistema Individual
Son los planes cuyos promotores son una o varias entidades financieras y cuyos partícipes son cualesquiera personas físicas. Como ejemplo, tenemos los Planes de Pensiones del BBVA, Santander, Sabadell, etc.

2 . Planes de Pensiones según sus obligaciones

Según las obligaciones, los planes de pensiones tienen las siguientes modalidades:

2a) Planes de Aportación Definida

Aquellos en los que se define la cuantía de las contribuciones de los promotores y/o de los partícipes.

2b) Planes de Prestación Definida

En los que está predeterminada la cuantía de todas las prestaciones a percibir por los beneficiarios.

2c) Planes Mixtos.

Aquellos en los que se controla la cuantía de la prestación y de la contribución.

Los Planes del Sistema de Empleo y Asociados podrán ser de cualquier modalidad, y los del Sistema Individual sólo de aportación definida.

2.3 Fondos de Pensiones

El fondo de pensiones es un patrimonio común, sin responsabilidad jurídica, integrado por las aportaciones de los promotores para lograr el cumplimiento del plan, organizado y administrado por una entidad gestora con el concurso de un depositario y bajo la supervisión de una comisión de control (https://www.boe.es).

El fondo de pensiones puede ser definido como una institución inversora, que invierte los fondos aportados por los patrocinadores y los participantes para proporcionar los futuros derechos de pensiones de los beneficiarios. De este modo proporcionan a los individuos la posibilidad de que acumulen ahorros durante su vida laboral, con el fin de financiar sus necesidades en la jubilación, bien por medio de una suma única o mediante una renta. Los Fondos de Pensiones son patrimonios, sin personalidad jurídica, creados con el único objetivo de dar cumplimiento a los Planes de Pensiones (Davis, E. Philip., 1995).

Los fondos de pensiones son a menudo patrocinados por los empleadores, tales como compañías, corporaciones públicas, grupos industriales o comerciales. Los fondos pueden ser gestionados internamente o externamente. La cuantía de las prestaciones que recibirán los beneficiarios de los planes de pensiones respaldados por dichos fondos puede depender exclusivamente del mercado (los fondos de contribución), o puede haber una rentabilidad garantizada por el patrocinador (fondos de prestación definida). Estos últimos tienen características de seguros en relación con las tasas de sustitución (cuantía de las pensiones como proporción de los ingresos antes de la jubilación), sujetos al riesgo de quiebra del patrocinador, así como potencial para la transferencias de riesgo entre los beneficiarios de mayor edad y los más jóvenes, una característica que está ausente en los fondos de aportación definida (Bodie, 1996).

Para ambos tipos de fondos, la rentabilidad se calcula en términos reales (ajustados por inflación). Esto se debe a que el objetivo de su gestión consiste en alcanzar una alta relación de sustitución en la jubilación (pensiones como proporción del sueldo final), que es a su vez determinada por la tasa de crecimiento de los ingresos medios en términos reales.

La base de un fondo de pensiones es la solidaridad entre las distintas generaciones y los participantes en el plan de pensiones. Los fondos de pensiones se basan en tres pilares, el **Público o No Contributivo,** el **Contributivo o Privado, y** el de **Previsión Individual.**

Primer Pilar: Público y no contributivo (**la Seguridad Social**).

Está gestionado por los gobiernos, con el objetivo de garantizar la protección ante determinadas contingencias (enfermedad, desempleo, accidentes) y ante determinadas situaciones vitales, como la jubilación. En este pilar se engloban las Pensiones Contributivas y No Contributivas anteriormente comentadas.

Segundo Pilar: Contributivo y Privado

El segundo pilar está constituido por los sistemas de pensiones promovidos por las empresas y que están orientados a generar ahorro privado para la futura jubilación de sus empleados. Las aportaciones a estos planes pueden deberse íntegramente al empleador (promotor), o pueden estar formadas también por aportaciones de los partícipes (empleados). **Se basa en un sistema de capitalización** mediante el cual cada trabajador cotiza para sí mismo, a través de aportaciones que se van capitalizando y en base a las cuales se constituirán las futuras prestaciones. Éstas dependerán de la cuantía de las aportaciones y de la evolución financiera de las mismas.

Tercer Pilar: Previsión individual:

El tercer pilar está **basado en los ahorros individuales**, que cada individuo puede llevar a cabo con la mediación de empresas de seguros de vida o entidades financieras. Y es independiente de las relaciones laborales (OCDE, 2007).

Los fondos de pensiones se han convertido en importantes instituciones financieras. En 2007, el valor total de los activos de los fondos de pensiones privados de la OCDE fue de USD 17.9 trillones (OCDE, 2009). La importancia de los fondos de pensiones difiere de país a país, como comprobaremos en una tabla que mostraremos posteriormente.

2.3.1 Tipos de Fondos de Pensiones

Los fondos de pensiones se clasifican de dos formas:

1. **Fondos de pensiones de empleo** cuyo ámbito de actuación se limitará al desarrollo de planes de pensiones del sistema de empleo exclusivamente.
2. **Fondo de pensiones personales** cuyo ámbito de actuación se limitará al desarrollo de planes de pensiones del sistema asociado y/o individual.

No obstante, en relación con los procesos de inversión desarrollados, los fondos de pensiones podrán encuadrarse dentro de dos tipos:

b.1) Fondo de pensiones cerrado, destinado exclusivamente a instrumentar la inversión de los recursos del plan o planes de pensiones adscritos a aquel.

b.2) Fondo de pensiones abierto, caracterizado por poder canalizar y desarrollar, junto con la inversión de los recursos del plan o planes de pensiones adscritos a aquél, la inversión de los recursos de otros fondos de pensiones de su misma categoría en los términos establecidos por el reglamento de la ley de Planes y Fondos de Pensiones.

2.3.2 Sistema de Pagos de Pensiones.

El sistema de pago de pensiones usado en España es un **Sistema de Reparto**. En este sistema las pensiones que cobran los jubilados, son pagadas por las personas que están trabajando en el momento actual. Así las pensiones de las personas que se jubilarán de aquí a treinta años serán pagadas por los trabajadores que estén trabajando en aquel momento.

De esta forma, todos los meses se recauda una cantidad para pagar las pensiones de este mes. En la nómina hay una parte que se llama la base de cotización, y que consiste en descontar un 4,70% del sueldo del trabajador. Por otro lado, la empresa contratante debe aportar en la base de cotización un 23,6%. Y de esa forma se pagan las pensiones.

Por lo tanto, el sistema actual del pago de pensiones en España depende de la solidaridad de cada participante. Se paga a los pensionistas actuales pensando que en el futuro, cuando los trabajadores actuales sean pensionistas, las pensiones se pagarán con las nóminas de los que estén trabajando en aquel momento (www.seg-social.es, 2015).

Uno de los principales problemas que está enfrentando España con el **Sistema de Reparto** es que el número de personas que están trabajando y cotizando actualmente no es suficiente para pagar las pensiones de todos los jubilados, ya que la esperanza de vida en España es muy alta, alrededor de 82 años. Lo que implica que hay meses que el gobierno puede tener dificultades para pagar las pensiones porque no hay dinero suficiente. Para solucionar este problema lo que se hace es utilizar el dinero del llamado **Fondo de Reserva de las Pensiones**.

Hay veces que la gestión dañina de determinadas entidades gestoras impide que se haga correctamente el pago de las pensiones de los jubilados, recurriendo entonces al fondo de reservas del estado. Si se hace una buena gestión del fondo de pensiones y se llevan a cabo buenas políticas de inversiones a fin de maximizar la riqueza esperada con dedicación y empeño, se consigue hacer frente a los pagos de todas las pensiones de los jubilados, ya que es su derecho por ley recibir su pensión fruto de los muchos años que han trabajado.

Existen tres formas de hacer el pago de las pensiones que son:

1) **Sistema de pago basado en el último sueldo**

Definiremos dos variantes para el caso.

1.a) Sistema del pago final actualizado

En este sistema, cada aumento salarial no solo afecta a los derechos que se van constituir en los años de servicios futuros, sino también a los derechos constituidos anteriormente.

1.b) Sistema del pago final moderado

Este sistema difiere del sistema anteriormente descrito en el sentido de que los aumentos salariales en los últimos años no dan lugar a pensiones más altas. Lo que impide que un aumento del sueldo en los últimos años de servicio genere una pensión más alta.

2) **Sistema de pago basado en los sueldos promedio.**

Para los pagos basados en los sueldos promedios se distinguen dos variantes.

2.a) Sistema de pago basado en el sueldo medio actual

En este sistema todo incremento del sueldo tiene una influencia en la pensión que será constituida en los años de servicios restantes. La pensión de todos los años anteriores permanecerá inalterable.

2.b) Sistema de pago basado en la indexación de los sueldos

Este sistema se caracteriza por el hecho de que antes de hacer el pago de la pensión se corrigen los aumentos de precios o de los sueldos, teniendo en cuenta también cualquier aumento del sueldo verificado.

2.3.3 Políticas y Organización de los Fondos de Pensiones

Los fondos de pensiones son gestionados por un consejo responsable de su funcionamiento, que tiene varios instrumentos a su disposición para llevar a cabo su función. El consejo debe tener en cuenta el interés de todas las partes. La figura que se presentara abajo explica cómo funciona generalmente en la práctica.

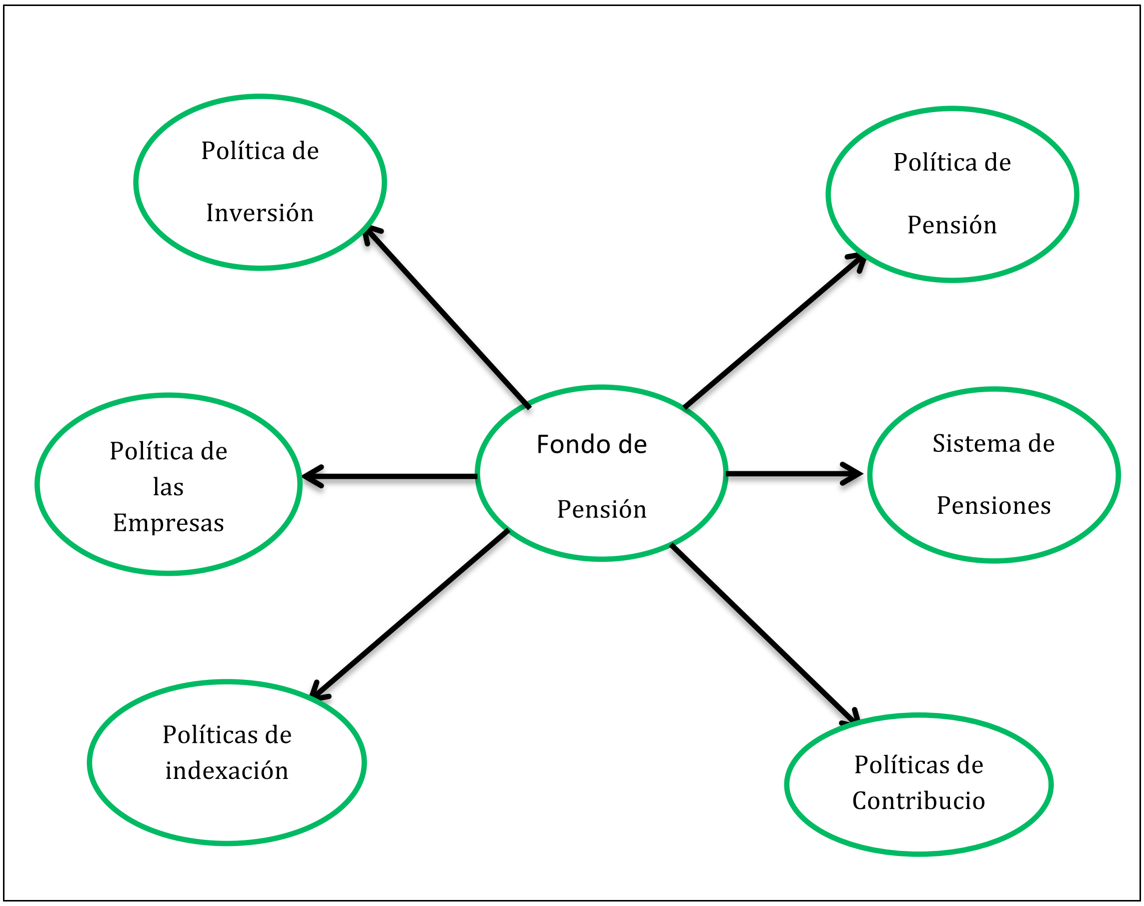

Figura 4: Reglamento y Políticas del Fondo de Pensiones.

2.3.3.1 Política de Inversión

Las políticas de inversión varían de acuerdo con la entidad gestora del fondo de pensiones: las compañías gestoras del fondo de pensiones del estado suelen adoptar una política más conservadora, mientras que las otras entidades gestoras de fondos de pensiones tienen una política más arriesgada, como es el caso de muchos de los bancos españoles, como Bankia, Santander, Sabadell, etc, que invierten más del 70% de los activos de algunos fondos en renta variable, lo que puede originar un riesgo muy elevado a la hora del retorno del capital invertido. El Ministerio de Empleo y Seguridad Social recomienda invertir el 75% del fondo en renta fija, pero son muy pocas las compañías que siguen tal recomendación. En su mayoría las entidades privadas gestoras no son partidarias de esta política.

2.3.3.2 Política de Indexación

La indexación tiene en cuenta la inflación y el incremento de los sueldos a la hora de hacer el pago de las pensiones, lo cual no es una tarea fácil, pues es necesario primero analizar la liquidez y la solvencia del fondo, así como el valor de los pasivos al indexar todos los pagos de las pensiones. El valor de los pasivos crece casi exponencialmente, provocando un incremento de los gastos, incluso a veces que los activos solo sirven para pagar un 70% de las pensiones, si le añadimos la indexación perdemos mucha liquidez y en consecuencia no se podrá hacer frente a todos los pagos de las pensiones. Así, antes de indexar es necesario calcular el ratio de los activos con relación a los pasivos, ya que no siempre se puede indexar la totalidad del fondo de pensiones. A veces solo se puede hacer una indexación parcial, que solo indexa una parte del fondo.

Incluso hay algunos países africanos como Angola y Nigeria, y de América Latina como Guatemala, Nicaragua, Paraguay y México, en los que no se hace ningún tipo de indexación, solo se hace el pago equivalente, lo que no es recomendable porque el nivel de vida de los jubilados baja mucho al recibir el dinero de la pensión, y casi ni llega para satisfacer las necesidades básicas de los jubilados.

Lo que no es el caso de países más desarrollados como España y algunos de los países de UE, así como EEUU, pues en estos países ya se tienen en cuenta los aspectos de indexación a la hora del pago de las pensiones, y se crean políticas de descuentos para los jubilados en transportes, alimentación, medicinas, salud, etc. Pero aun así la indexación que se hace no es total, es decir, se hace un pequeño incremento a la hora del pago de las pensiones pero no se paga la indexación total.

2.3.3.2 Políticas de Las Compañías de Seguro

Las políticas de las compañías de seguros son vigiladas por un supervisor, que en España es la Dirección General de Fondos y Planes de Pensiones. Las empresas de seguros tratan de reasegurar sus riesgos, sobre el capital en caso de fallecimiento, incapacidad, incapacidad temporal, asistencia sanitaria, etc.

2.3.3.3 Políticas de Contribución

La política de Contribución del fondo trata de gestionar todos los activos del fondo, controlando las aportaciones de los participantes en los planes de pensiones. El sistema de contribución utilizado es dinámico, en el sentido de que la pensión que cada individuo recibe depende del número de años que cotiza. La tasa de contribución de cada participante del fondo puede ser cambiada a lo largo de los años, para poder hacer frente a la subida de los pagos de los pasivos. Por otro lado, para fijar una nueva tasa de contribución es necesario que las partes involucradas en el proceso de decisión estén de acuerdo, sobre todo los participantes activos.

2.3.3.4 Políticas de las Pensiones

Las políticas de las pensiones están relacionadas con los diferentes tipos de pensión que se ha presentado en la sección 2.1. Cada tipo de pensión tiene su forma de pago y compatibilidad o incompatibilidad a la hora de hacer el pago, dependiendo de la pensión que cada individuo recibe. Las personas más interesadas en estas políticas son los participantes activos y los beneficiarios o jubilados.

2.3.3.5 Política del Sistema de Pensiones

La política del sistema de pensiones analiza las diferentes formas de pagos de las pensiones, algo que ya fue tratado en la sección 2.1.2. Se trata de hacer un análisis de la solvencia del fondo y de ahí elegir la forma de pago de las pensiones. A fin de proporcionar la mejor vida posible al pensionista sin comprometer los pagos futuros.

2.4 Desarrollo Del Fondo de Pensiones

2.4.1 Los Activos

Los activos del fondo de pensiones dependen de las aportaciones hechas por los participantes en el plan de pensiones, también llamadas cotizaciones. Las aportaciones recaudadas se acumulan en una o varias cuentas corrientes. Una vez que las cotizaciones están en la cuenta, se entrega la gestión del capital del fondo a una entidad encargada de gestionar el fondo de pensiones mediante políticas de inversiones y respetando las regulaciones gubernamentales.

Durante los próximos cinco años, se espera que los activos de los fondos de pensiones crezcan un 26%, de una estimación de USD 28.4 billones en 2014 a USD 35.8 billones en 2019; que los activos de las aseguradoras crezcan un 33%, de USD 28.2 billones en 2014 a USD 37.7 billones en 2019; y que los fondos mutuos aumenten un 38%, de USD 33.4 billones en 2014 a USD 46.1 billones en 2019 (OCDE Global Pension Statistics., 2009). *E*l capital total de los fondos de pensiones está compuesto por el capital de los fondos de pensiones estatales más el de los fondos de pensiones privados e individuales.

2.4.2 Desarrollo Actual de los Fondos de Pensiones en España

La cantidad mínima pagada en una pensión de jubilación es de 395 euros y la máxima es de 2.567,28 euros. Un 89,6% del Fondo de Reserva está invertido en deuda pública. Los fondos de pensiones tienen que enfrentarse a nuevas dificultades con respecto a la financiación para evitar situaciones desfavorables en el futuro. La situación financiera de los fondos de pensiones puede mejorar mediante la adopción de ciertas medidas:

a. Aumentando las contribuciones

Aumentar las contribuciones de los participantes activos significa flujos de efectivo más altos para los fondos, lo que fortalece la situación financiera.

b. Buscar financiación

Se basa en buscar financiación externa, con el fin de hacer frente los pagos.

c. Indexación incompleta

En lugar de altos flujos de efectivos, se puede elegir una compensación incompleta. Al hacer una indexación parcial evitamos un excesivo crecimiento de los capitales de jubilación. Es evidente que esta opción no será de agrado para los jubilados, pues ellos siempre querrán tener la máxima pensión posible, pero no siempre se puede indexar todo el fondo de pensiones, porque nos enfrentamos al riesgo de descapitalización.

d. Cambios regulatorios

Reducir la cuantía de los pasivos mediante cambios en la legislación. Un ejemplo sería la modificación de las posibilidades de indexación, ya comentada anteriormente.

2.4.3 Perspectiva Internacional de Activos de los Fondos de Pensiones

El valor de mercado de los activos acumulados en los fondos de pensiones es un indicador clave de la escala de la actividad en relación con el tamaño de la economía, medido por el PIB. Cuanto mayor sea el valor de las inversiones, mayor será su capacidad de proporcionar grandes beneficios a las personas.

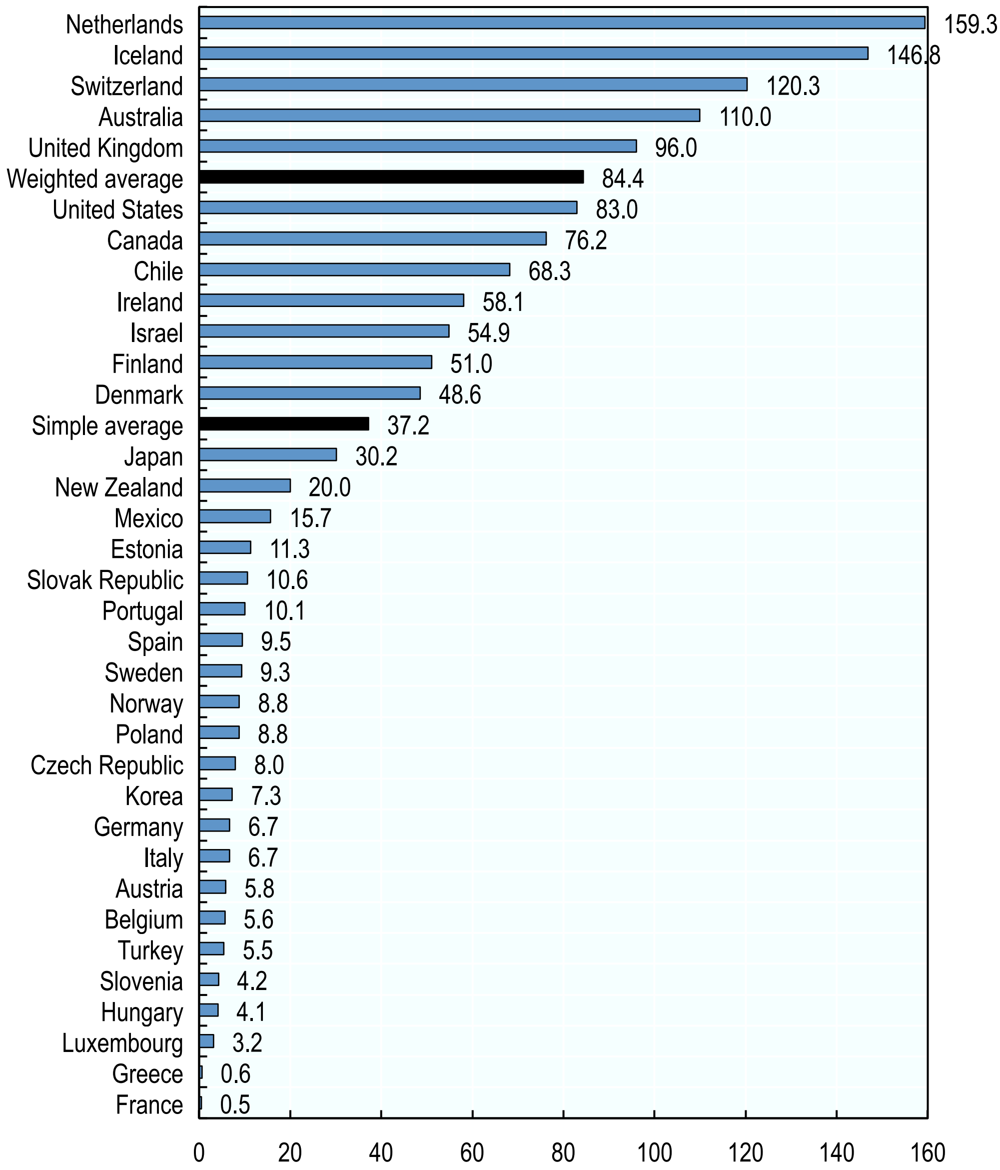

Figura 5: Activos de los Fondos de Pensiones con respecto al tamaño de la Economía en los Países de la OCDE

, (OCDE G. P., 2014).

Como muestra la Figura 2, cuatro países alcanzaron proporciones de activos frente PIB por encima del 100% en 2012 - los Países Bajos (159,3%), Islandia (146,8%), Suiza (120,3%) y Australia (110,0%). Estos países, junto con el Reino Unido, superaron la media ponderada de la relación activos-PIB en la OCDE, que es el 84,4%. En España este valor es de 9,5% del PIB. Es de señalar que en la mayoría de los países de la OCDE la relación activos-PIB está por debajo del 20%, lo que indica buenas perspectivas de crecimiento (OCDE Global Pension Statistics., 2009).

Durante la última década, los activos de los fondos de pensiones como porcentaje del PIB aumentaron con fuerza en los Países Bajos (del 102,6% del PIB en 2001 al 160,2% del PIB en 2012) e Islandia (de 84,0% del PIB en 2001 al 141,0% del PIB en 2012). Aunque existe una diferencia considerable del peso de los fondos de pensiones en el PIB Español comparado con los Países Bajos, en España también aumentó el porcentaje (pasando del 6.5% del PIB en 2003 al 9.5% del PIB en 2012).

Por otra parte, el peso se redujo en Hungría (desde el 3,9% del PIB en 2001 al 3,3% del PIB en 2012, tras alcanzar un máximo del 14,9% del PIB en 2010), Bélgica (del 5,5% del PIB en 2001 hasta el 4,6% del PIB en 2012) y Portugal (del 11,0% del PIB en 2001 al 8,8% del PIB en 2012). La disminución de los activos de los fondos de pensiones con relación al tamaño de la economía se explica en Hungría por la decisión del gobierno de cerrar el sistema privado de pensiones obligatorias al final de 2010 y en Portugal por la transferencia de los activos del fondo de pensiones de los bancos hacia el plan de jubilación del estado en 2011. Las series temporales de este indicador se muestran en las tablas comparativas adicionales.

En términos absolutos, los Estados Unidos aún poseía la mayoría de los activos de todos los países de la OCDE, por valor de USD 11.6 billones de dólares en 2012. En términos relativos, sin embargo, el peso de los activos en poder de los fondos de pensiones en los EE.UU. se redujo de 67,6 % en 2001 a 53,4% en 2012.

2.4.4 Retos para la viabilidad futura de los fondos de pensiones

En los próximos años, tanto el sistema público como el privado se enfrentarán a varios retos. El primero tiene que ver con la perspectiva demográfica. Al analizar la pirámide poblacional notamos que en 2050 el escenario será muy diferente que en 2016. Como hemos visto en las secciones anteriores, el sistema usado en España es el sistema de reparto. Según el Instituto Nacional de Estadística (INE), se estima que en el año 2016 existen 2,5 trabajadores activos por cada pensionista, pero sin embargo en 2050 este número descenderá a 1,4 españoles por pensionista, y seguirá decayendo. Para una mejor explicación presentamos una tabla que representa la esperanza de vida al nacer en los años 2000-2050 en Europa y España para hombres, mujeres y ambos sexos, (INE, 2011).

Europa				España		
Periodo	Ambos Sexos	Hombres	Mujeres	Ambos Sexos	Hombres	Mujeres
2000-2005	73,79	69,61	78,04	79,64	76,24	83,04
2005-2010	75,36	71,41	79,32	80,48	77,22	83,75
2010-2015	76,51	72,81	80,19	81,80	78,82	84,76
2015-2020	77,45	73,94	80,93	82,49	79,66	85,31
2020-2025	78,33	74,98	81,64	83,18	80,49	85,88
2025-2030	79,11	75,89	82,31	83,77	81,14	86,42
20302035	79,82	76,68	82,93	84,30	81,70	86,95
2035-2040	80,48	77,41	83,52	84,80	82,21	87,48
2040-2045	81,11	78,10	84,11	85,32	82,76	88,0
2045-2050	81,73	78,77	84,69	85,82	83,28	88,5

Tabla 3 : Esperanza de Vida al nacer en los años 2000-2010 en Europa y España

(The United Nations Secretariat, p. 2009)

Al observar la tabla podemos notar que uno de los principales problemas que España y casi todos los demás países de Europa tendrán con el sistema de pensiones es el envejecimiento de la población y el consiguiente deterioro de la tasa de dependencia, definida como la relación entre la población susceptible de recibir una pensión de jubilación y la población activa, (The United Nations Secretariat, 2014).

Por otro lado la tasa de natalidad en España es muy baja. Los jóvenes cada vez tienen menos hijos, muchas parejas no tienen hijos, y según las encuestas del INE, cada joven entrevistado quiere en media tener entre 1 y 2 hijos, lo que será insuficiente para aumentar la población de trabajadores activos en el futuro. Las previsiones apuntan a que dentro de 40 años por cada 10 personas en edad de trabajar residentes en España habrá también 9 potencialmente inactivas (menores de 16 años o mayores de 64), (INE, 2011) .

A los problemas estructurales hay que añadir la crisis económica padecida actualmente en España, que está suponiendo una elevada destrucción de empleo, de manera que la población potencialmente activa que actualmente se encuentra en desempleo hace peligrar aún más la necesaria sostenibilidad del sistema de pensiones.

Estos datos implican que España podrá tener serios problemas en el futuro a la hora de hacer frente a los pagos de las pensiones. Para prevenir los problemas futuros España ya empezó a tomar una serie de medidas. Las medidas que el gobierno español tomó para la actualización del sistema de pensiones se enmarcan en el acuerdo de Toledo, y pasarían tanto por el lado de los gastos como de los ingresos públicos, tal como ha sugerido el propio Banco de España recientemente.

Por el lado de los gastos, la medida de mayor efecto en términos de reducción de gasto en pensiones sería la de retrasar la edad de jubilación desde los 65 a los 67 años y de la edad mínima de jubilación de 61 a 63 años, manteniendo algunas excepciones para ciertos colectivos. El fuerte impacto de la medida en términos de ahorro público la coloca como una de las primeras candidatas para ser llevada a la práctica en el actual contexto de necesidad imperiosa de reducir el déficit público y recuperar credibilidad en los mercados financieros.

En otros países, sin abandonar el sistema de reparto, se ha optado por constituir una cuenta virtual para cada individuo donde se recogen aportaciones individuales de cada cotizante y los rendimientos ficticios que esas aportaciones generarían a lo largo de la vida laboral, calculados en relación a alguna variable como podría ser el índice de precios al consumo. Ello se asemeja mucho a las cuentas de posición individuales que se establecen en los planes individuales de pensiones y mejora la percepción y la transparencia de los individuos respecto a la reducción de incertidumbres sobre sus rentas futuras, (Wotson, 2016).

Aun así hay que seguir haciendo más reformas. Se estima que si no se hacen reformas, se iniciaría la trayectoria del déficit estructural del sistema de pensiones y hacia el 2050 el actual superávit se habrá convertido en un déficit del 8%.

A pesar de los problemas que podría tener España con los sistemas de pensiones debido al crecimiento poblacional de los jubilados y el decrecimiento del número de trabajadores activos, si todos ahorran en sus provisiones de jubilación, los activos son manejados de manera apropiada y eficiente y las entidades gestoras hacen bien su trabajo, con las nuevas reformas del sistema de pensiones se podría cumplir con todas las previsiones de pago de los pasivos.

2.5 Riesgos

Para gestionar un fondo de pensiones hay que tener en cuenta los diferentes tipos de riesgos a los que se enfrenta, solo así estaremos en condiciones de saber cuál será efectividad de cada inversión con relación a los diferentes tipos de riesgos que puedan surgir a lo largo del tiempo.

Se consideran varios tipos de riesgos, que son:

1. Riesgo relativo a la cartera de inversión de activos

Es el riesgo relacionado con las fluctuaciones del precio de los activos en el mercado, condicionando así la rentabilidad de los activos, y está relacionado con las políticas de los fondos de pensiones. El riesgo relativo a la cartera de activos de inversión se subdivide en:

1.a) Riesgo de tipo de interés

Analiza cómo las variaciones de los diferentes tipos de interés afectan la rentabilidad de los activos. En general, un aumento de los tipos de interés de mercado influye negativamente en el precio de un bono de cupón fijo, provocando una caída en el rendimiento esperado, y al contrario, un descenso de los tipos de interés afecta positivamente a la cotización de los bonos de cupón fijo, y provoca un crecimiento del rendimiento esperado.

1.b) Riesgo de divisa o Riesgo de tipo de cambio

Es el riesgo de que una inversión pierda su valor debido a la fluctuación de los tipos de cambio. Se origina generalmente en las inversiones hechas en otras monedas. Podemos tomar como ejemplo una empresa que adquiere un producto de un proveedor en el extranjero, con pago en la divisa del proveedor, lo que podría ser más o menos costoso para la empresa, dependiendo de las fluctuaciones de los tipos de cambio.

1.c) Riesgo de Liquidez

La pérdida potencial ocasionada por eventos que afectan a la capacidad de disponer de recurso del dinero en efectivo para enfrentar las obligaciones, ya sea por imposibilidad de vender activos, por reducción inesperada de pasivos comerciales o por verse cerrada sus fuentes habituales de financiación, (Pardo, 2008).

1.d) Riesgo de Crédito o Incumplimiento

Es el riesgo derivado del impago de intereses y/o principal de las emisiones existentes en la cartera. Los fondos de pensiones generalmente invierten una gran parte de sus activos en bonos, y están sujetos al riesgo de que el emisor del bono no pueda hacer frente al pago prometido.

1.e) Riesgo de Renta Variable.

Es el riesgo de que la rentabilidad del fondo se vea afectada por las fluctuaciones de los mercados en los que invierte.

1.f) Riesgo de concentración geográfica.

La concentración de una parte importante de las inversiones en un único país, determina que se asuma el riesgo de que las condiciones económicas, políticas y sociales de este país tengan un impacto importante sobre la rentabilidad de la inversión.

1.g) Riesgo de Instrumentos Derivados

Los instrumentos derivados son contratos cuyo valor deriva de un activo llamado subyacente. El activo subyacente de un derivado puede ser una acción, un índice bursátil, un bono, una divisa, una tasa de interés, la inflación, etc. Los instrumentos derivados son importantes porque constituyen una herramienta de gestión de riesgos efectiva. Tras definir su nivel de riesgo deseado, permite a los inversionistas cubrir sus carteras y tomar riesgos sólo en las proporciones deseadas de acuerdo a las condiciones del mercado. A las empresas, les permite cubrir el riesgo de las variables que no pueden controlar, como son la tasa de cambio o el precio de las materias primas, y de esta forma se pueden concentrar en gestionar su negocio (http://www.conozcalabvc.com).

2. Riesgos Actuariales

Existen varios tipos de riesgos actuariales entre los cuales se distinguen los siguientes:

2a) Riesgo de Longevidad

Es el riesgo de que el participante del plan de pensiones viva más tiempo del previsto por los cálculos de predicciones actuariales. Este tipo de riesgo está relacionado con los cambios en la esperanza de vida, y se centra en la vejez de los pensionistas.

2b) Riesgo de vida corta: es el riesgo asociado a que el participante viva menos que lo esperado. En este caso los pagos de beneficios pueden ser para los parientes supervivientes del fallecido, generalmente la viuda.

2c) Riesgo del elevado valor de los pasivos: surge cuando el valor de los pasivos es calculado con una tasa de descuento fija, y la tasa de interés del mercado vigente en los mercados financieros es más baja que la tasa fijada. Esto es un riesgo, porque el valor de mercado de los pasivos sería mayor en este caso.

3. Riesgo Relacionado a la Indexación

Este tipo de riesgo surge cuando los beneficios tienen que ser corregidos por la inflación, ya que una tasa elevada de inflación puede llevar a un número muy elevado de pagos de beneficios, y también a un alto valor de los pasivos, lo que provoca más gasto. Así es necesario tener en cuenta si el capital disponible al hacer la indexación permitirá hacer frente a todos los pagos. Hay veces que no se puede hacer una indexación total, pero sí una parcial para no comprometer el pago de los demás pensionistas. Los participantes activos, los miembros diferidos y las personas jubiladas están interesadas en la indexación, pues su nivel de vida como jubilado mejora o empeora fruto de la decisión de indexar o no el fondo de pensiones.

2.6 Medida del Riesgo

Para poder hacer la mejor gestión con el mínimo de riesgo posible, es necesario hacer una correcta medición de los riesgos.

Las dos medidas del riesgo más importantes hoy en día son el VaR y el CVaR, que definiremos a continuación.

Definición (Valor en Riesgo)

Dado un nivel de confianza $\boldsymbol{\alpha} \in (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ el llamado $\boldsymbol{VaR}$ o **Valor en Riesgo** es un número $\boldsymbol{l}$ tal que la probabilidad de que la pérdida $\boldsymbol{L}$ exceda el número $\boldsymbol{l}$ no sea mayor que $(\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha})$**.** Matemáticamente se expresa de la siguiente forma.

$$\textbf{(2.6.1)} \qquad \boldsymbol{Var_\alpha} = \mathbf{inf}\{\boldsymbol{l} \in \mathbb{R}: \boldsymbol{P}(\boldsymbol{L} > \boldsymbol{l}) <= (\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha})\} = \mathbf{inf}\{\boldsymbol{l}: \boldsymbol{F_L}(\boldsymbol{l}) \geq \boldsymbol{\alpha}\}$$

Presentada la definición del VaR, aprovechamos el desarrollo y las notaciones de **(Rockafellar , Uryasev ,2002)** para introducir la definición que más se adapta a los casos prácticos. Sea $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ un vector de decisión y $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x})$ el conjunto de variables aleatorias que representan todas las pérdidas asociadas con $\boldsymbol{x}$. $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x})$ se puede escribir de forma lineal en $\boldsymbol{x}$, como por ejemplo

$$\textbf{(2.6.2)} \qquad \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x_1 Y_1} + \cdots + \boldsymbol{x_n Y_n}$$

donde $\boldsymbol{Y_i}$ puede representar las variables aleatorias de las pérdidas (los retornos negativos) o un activo individual. Definimos

$$\boldsymbol{\psi_L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{P}[\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{\xi}].$$

Entonces para una decisión dada $\boldsymbol{x}$, el VaR con un nivel de confianza $\boldsymbol{\alpha}$ es dado por

$$\textbf{(2.6.3)} \qquad \boldsymbol{VaR_\alpha} = \mathbf{inf}\{\boldsymbol{\xi} | \boldsymbol{\psi_L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \geq \boldsymbol{\alpha}\}.$$

Para analizar la coherencia de una medida de riesgo, se introdujeron las siguientes propiedades **(Artzer et all, 1999)**.

1. **Homogeneidad Positiva**

$\boldsymbol{\rho(\lambda x) = \lambda\rho(x)}$. Si se cambia la unidad de medida del riesgo, este se modificará en la misma proporción.

2. **Monotonicidad**

$\boldsymbol{x \leq y \Rightarrow P(x) \geq P(y)}$. Si la cartera " $\boldsymbol{x}$" tiene sistemáticamente menor retorno que la cartera "$\boldsymbol{y}$", su riesgo debe ser mayor.

3. **Invariancia Transicional**

$\boldsymbol{\rho}(x + \alpha) = \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x}) - \alpha$. Añadir efectivo a una cartera por un monto α debe reducir el riesgo en α.

4. **Sub-aditivitividad**

$\boldsymbol{\rho}(x + y) \leq \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x})$**.** La integración de dos activos en una cartera no debe incrementar el riesgo que se corre cuando se mantienen separados.

El VaR sirve para medir el riesgo del retorno en una cartera de inversión, pero sin embargo según Artzer no cumple con la propiedad de subaditividad. El CVaR posee mejores propiedades que el VaR y cumple con todas las propiedades mencionadas anteriormente, por lo tanto es una medida de Riesgo Coherente, (Artzer et all, 1999).

Definición ($CVaR$)

Se define $\boldsymbol{CVaR}$ como la pérdida esperada para los casos en que la pérdida del valor de la cartera exceda el valor del $\boldsymbol{VaR}$. Según (Rockafellar , Uryasev ,2002) se expresa matemáticamente de la siguiente forma. Definimos una variable aleatoria $\boldsymbol{T_\alpha(x)}$ como la cola de la función de distribución de la pérdida $\boldsymbol{L(x)}$.

(2.6.4)

$$\Psi_{T_\alpha}(x,\xi) = \begin{cases} 0 & \xi < VaR_\alpha(x) \\ \dfrac{\psi_L(x,\xi) - \alpha}{1 - L} & \xi \geq VaR_\alpha(x) \end{cases}$$

Donde $\boldsymbol{x}$ es la variable de decisión, y $\boldsymbol{T_\alpha}$ la función de distribución de las colas.

Si la función de distribución de $\boldsymbol{L(x)}$ es discreta entonces el $\boldsymbol{CVaR}$ es la esperanza condicionada del $\boldsymbol{VaR}$, y se expresa matemáticamente de la siguiente forma.

$$\textbf{(2.6.5)} \qquad CVaR = E[T_\alpha(x)]$$

2.6.1 Representación Equivalente del $CVAR$

La falta de convexidad del $\boldsymbol{VaR}$ conlleva dificultades en el proceso de optimización numérica. Trabajar con el $\boldsymbol{VaR}$ es más fácil, particularmente cuando usamos la distribución normal. Pero los datos financieros difícilmente se ajustan a una distribución normal, y por otro lado el $\boldsymbol{VaR}$ tampoco es convexo y no cumple con la propiedad de subaditividad, por lo que en caso de diversificación de una cartera usando el $\boldsymbol{VaR}$ podríamos estar aumentando el riesgo. Sin embargo, $\boldsymbol{CVAR}$ tiene una representación muy conveniente que facilita su cálculo en numerosos problemas.

Comenzamos definiendo la función:

(2.6.6) $$\boldsymbol{\Gamma_\alpha(x,\xi) = \xi + \frac{1}{1-\alpha} E[(L(x)-\xi)^+]}$$

Entonces el cálculo del $CVaR$ puede ser expresado como un problema de minimización a través del siguiente resultado: $\Gamma_\alpha(x,\cdot)$ es finito y continuo.

(2.6.7) $$\boldsymbol{CVaR_\alpha(x) = \min_{\xi\in\mathbb{R}} \Gamma_\alpha(x,\xi)}$$

Se puede demostrar que si $\boldsymbol{L(x)}$ es convexo en x, entonces el $\boldsymbol{CVaR_\alpha(x)}$ es convexo en $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{\Gamma_\alpha(x,\xi)}$ es convexo conjuntamente en $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$. Además si las restricciones son convexas, el siguiente resultado produce un problema de optimización convexo en $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$: Minimizando el $\boldsymbol{CVaR_\alpha(x)}$ con respecto a $x \in X$ es equivalente a minimizar $\boldsymbol{\Gamma_\alpha(x,\xi)}$ con respecto a $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \in \boldsymbol{X}\times\mathbb{R}$, es decir.

(2.6.8) $$\boldsymbol{\min CVaR_\alpha(x) = \min_{(x,\xi)\in X\times\mathbb{R}} \Gamma_\alpha(x,\xi)}$$

La demostración de este corolario puede encontrarse en (Rockafellar , Uryasev ,2002). Hay muchos otros resultados para representar las restricciones del $\boldsymbol{CVAR}$ en los problemas de Optimización.

Cuando $L(x)$ tiene una distribución discreta asociada por ejemplo a un árbol de escenarios, la ecuación (1.3.7) se transforma en

(2.6.9)

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha}(x,\xi)=\xi+\frac{1}{1-\alpha}\sum_{s=1}^{S}p^{S}[L^{s}(x)-\xi]^{+}$$

Donde la variable aleatoria $L(x)$ toma valores $L^s(x)$ con probabilidad p^S para $s=1,\dots,S$. Además, si $L(x)$ es lineal en x, $\tilde{\Gamma}_\alpha$ es lineal y convexo por tramos.

2.6.2 Optimización Del Beneficio De la Medida de Riesgo $CVaR$

Para aplicar los resultados anteriores para un solo periodo en el problema de asignación de la cartera, definimos el siguiente conjunto de restricciones.

(2.6.10)

$$X=\left\{x\in\mathbb{R}^{n}\,\middle|\,\sum_{j=1}^{n}x_{j}=1,x_{j}=1,\dots,n\right\}$$

Donde $x\in X$ representa la posición en n Activos. El retorno aleatorio de estos activos al final del periodo está representado por $r=(r_1,\dots,r_n)^T$y el retorno negativo total de una cartera es dado por:

(2.6.11) $\quad L(x)=-x^{T}r$

Si la media de r es dada por un vector μ, el problema del Riesgo-Beneficio es

$$\min_{x\in X} CVaR_{\alpha}(x) \text{ sujeto a } x^{T}\mu\geq\mu_{0}.$$

Donde μ es el retorno de la cartera requerido. La formula equivalente es.

(2.6.12)

$$\min_{x,\xi} \xi + \frac{1}{1-\alpha}\sum_{s=1}^{S} p^s[-x^T r^{\,s} - \xi]^+$$

Sujeto a

$$x^T\mu \geq \mu_0$$

$$x \in X, \xi \in \mathbb{R}$$

Introduciendo variables auxiliares $y^s, s = 1, \dots, S$, resulta un problema de Programación Lineal

$$\min_{x,\xi,y^s} \xi + \frac{1}{1-\alpha}\sum_{s=1}^{S} p^S y^s$$

Sujeto a

(2.6.13)

$$x^T\mu \geq \mu_0$$

$$x^T r^S + \xi + y^s \geq 0, s = 1, \dots, S$$

$$y^s \geq 0, s = 1, \dots, S$$

CAPITULO III

GESTIÓN DE ACTIVOS Y PASIVOS DE FONDOS DE PENSIONES USANDO PROGRAMACION ESTOCASTICA

3.1 Antecedentes

El fundamento teórico de la gestión de activos y pasivos de fondos de pensiones mediante programación estocástica se remonta al trabajo de Harry Markowitz en su artículo titulado Portfolio Selection y publicado en 1952, en donde introdujo el concepto de optimización media-varianza de la rentabilidad basada en el riesgo, en oposición al enfoque tradicional basado en optimizar el retorno (Harry Markowitz, 1952). Posteriormente aparecieron otros importantes conceptos y modelos, como el Capital Asset Pricing Model (CAPM) de Sharpe (William F. Sharpe, 1964). La moderna teoría de la valoración de activos comienza con la publicación de la famosa fórmula de valoración de opciones de Black y Scholes en 1973, y con el trabajo de Stephen Ross sobre valoración por arbitraje en 1976 (Stephen A. Ros, 1976).

La aplicación de la teoría de selección de una cartera óptima para decidir el mejor momento para invertir en un problema de gestión de un fondo, fue llevada a cabo por Merton en 1990, aplicando la teoría de Markowitz para gestionar un fondo de donación de una universidad. Con una idea similar, (Boulier, J-F., Trussant, E,Florens, D, 1995) formularon modelos de programación dinámica en tiempo continuo para la gestión de fondos de pensiones, y sus resultados fueron posteriormente generalizados por Rudolf y Ziemba (Rudolf, M., and W. Ziemba,, 975–990). También es importante mencionar el artículo de (Zapatero, Sudaresan , 1997), de nuevo en el contexto de la toma de decisiones para la gestión en tiempo continuo.

Debido la simplicidad de los modelos en tiempo continuo, que dificulta la modelización completa y realista de la incertidumbre, la literatura se ha centrado fundamentalmente en los modelos en tiempo discreto. Esto ha favorecido la aplicación de técnicas de programación estocástica a la gestión de activos y pasivos, entre las que destacamos las debidas a (Kalberg et all, 1981), (Kusy, M.I,W.T Ziemba, 1986.), (Mulvey,J.M., and H.Vladimirou, 1992). Entre las muchas aplicaciones de estas técnicas, comentaremos tres con más detenimiento.

La primera aplicación es el modelo de Russel-Yasuda-Kasai que se expone en (Cariño & Ziemba, 1998). El modelo analiza las decisiones sobre la mejor manera de llevar a cabo las inversiones, para hacer frente a los compromisos de pago de los pasivos corrientes en una empresa de seguros japonesa. El objetivo es obtener altas rentabilidades de las inversiones, que permitan pagar los intereses anuales de los diferentes tipos de ahorro de las pólizas de seguro, maximizando al mismo tiempo la riqueza a largo plazo de la empresa y respetando las complejas regulaciones impuestas por las leyes y las prácticas habituales de las compañías de seguros japonesas. El modelo es un modelo estocástico lineal de múltiples etapas con recursos. El uso de este modelo permitió obtener beneficios de 79 millones de dólares en los primeros dos años de su aplicación. Para obtener los resultados se requieren tres horas de cálculos en un ordenador muy potente.

La segunda aplicación, comentada en (John M. Mulvey, 2000), tuvo relación con la empresa de seguros estadounidense Towers Perrin-Tillinghast. Consiste en un sistema de gestión de activos y pasivos que planifica de forma óptima las inversiones y permite además ayudar a los clientes a entender los riegos y las oportunidades asociadas con las inversiones en los mercados de capitales, así como otras decisiones importantes. El sistema tiene dos componentes principales, un generador de escenarios estocásticos y un algoritmo para la optimización de programas no lineales. El sistema integrado de inversiones es capaz de relacionar los riesgos de los activos y los pasivos, de manera que se logra mejorar los objetivos de la empresa. Por ejemplo, en el oeste de Estados Unidos la aplicación de este modelo permitió un ahorro de 450 millones de dólares respecto a los ejercicios anteriores.

La tercera aplicación es un modelo de planificación financiera con programación estocástica para la gestión de los activos y pasivos de un fondo de pensiones de la sucursal austriaca de la multinacional electrónica Siemens. Se trata de un modelo de programación lineal estocástica con un número flexible de periodos de tiempo de longitudes variables. La incertidumbre se modela utilizando múltiples periodos y escenarios de probabilidad para el retorno aleatorio y los demás parámetros del modelo. Las correlaciones entre las diferentes clases de activos, bonos, acciones, dinero en efectivo y otros instrumentos financieros, dependen en las múltiples etapas de las matrices de correlación que se corresponden con diferentes condiciones del mercado. Esta característica permite anticipar y reaccionar rápidamente a los nuevos problemas que van surgiendo, así como gestionar las condiciones normales de mercado. Las leyes que regulan las pensiones en Austria y otras posibles limitaciones prácticas se introducen en el modelo como restricciones en la optimización. La función de aversión al riesgo es cóncava, y el objetivo consiste en maximizar el valor actual de la riqueza final esperada con un horizonte temporal finito, descontando el valor esperado de los costes de penalización (que es una función lineal por tramos). La empresa tiene una interfaz de usuario que permite la visualización de los resultados clave del modelo y de los efectos que tienen los posibles cambios en las políticas de gestión. El proceso de resolución usa el código de programación estocástica IBM OSL, que es lo suficientemente rápido como para generar decisiones casi en tiempo real, y los resultados son de fácil comprensión y permiten una fácil interacción del usuario con el modelo. El modelo se ha utilizado desde el año 2000 en la empresa Siemens, primero en Austria y posteriormente en otros países. Y también ha sido empleado para evaluar los posibles cambios en el reglamento de fondos de pensiones en Austria, (Alois Geyer, William T. Ziemba, 2000).

También son importantes las aportaciones de (John M. Mulvey, Robert J. Vanderbei, Stavros A. Zenios, 1995) y (Beltratti et al, 1999), así como las aplicaciones comentadas en Ziemba y Mulvey (1998) y Ziemba (2003). En la mayor parte de los casos, los modelos de programación estocástica requieren que las incertidumbres sean modelizadas en tiempo discreto mediante un árbol con un número finito de ramas o escenarios. En la práctica es importante tener en cuenta cuestiones como los costes de transacción, la existencia de mercados incompletos, los impuestos, los límites de negociación, las restricciones regulatorias y los requisitos de las políticas de las empresas, todas las cuales pueden ser tratadas mediante la introducción de nuevas variables estocásticas o de restricciones adicionales, lo que sin duda tendrá un coste en términos de la trazabilidad numérica del modelo resultante. Las soluciones analíticas no son posibles, y por tanto los modelos de programación estocástica necesitan ser resueltos por un programa de optimización numérico (Mulvey, 2006).

3.2 Gestión de Activos y Pasivos con Programación Estocástica

Después de comentar los antecedentes de la gestión de activos y pasivos con programación estocástica, definiremos y analizaremos con más precisión en qué consiste exactamente la gestión de un fondo de pensiones mediante dicha técnica.

Es evidente que en la gestión de los fondos de pensiones hay muchas fuentes de incertidumbre. Entre ellas, podemos citar las asociadas con las rentabilidades futuras de los activos, así como las variaciones a lo largo del tiempo del valor de los pasivos, el crecimiento de los pasivos condicionado por el nivel de indexación del fondo, el valor de la riqueza final, la solvencia del fondo, su rentabilidad esperada, etc. Gestionar un fondo de pensiones mediante programación estocástica implica que estas incertidumbres se deben modelizar como variables aleatorias o procesos estocásticos, asumiendo que se conocen las distribuciones de probabilidades, lo que permite cuantificar los valores de las incertidumbres y tomar las mejores decisiones de gestión, como los mejores momentos para invertir y la selección de la cartera de inversiones, con el fin de obtener los mayores beneficios con el mínimo riesgo y coste posibles.

La gestión se lleva a cabo mediante un modelo matemático que se basa en distribuciones de probabilidades discretas, con un número finito de escenarios, que abarcan múltiples etapas y que cuantifican las incertidumbres, como se comentó anteriormente. La principal ventaja de los modelos de programación estocástica radica en su flexibilidad, es decir, en la posibilidad de analizar las posibles decisiones sobre las inversiones y los pasivos, de incluir o modificar las funciones objetivo y las posibles restricciones que acotan los comportamientos de las incertidumbres a lo largo del tiempo.

En las aplicaciones a la gestión de fondos de la programación estocástica de múltiples etapas, en general se asume una simplificación aceptada por unanimidad por el Comité de Programación Estocástica y por los diseñadores de los modelos, que consiste en que la cartera solo puede ser modificada al inicio de cada periodo. En el dicho momento, las estrategias aplicadas pueden describirse de forma simplificada como ***Comprar-y-Vender***, ***Comprar-Retener-Vender***, ***Comprar-y-Retener***, o una combinación de ellas (Dučapova, J, 1995).

Por lo tanto, la adecuada discretización del tiempo, es decir, la correcta definición de las etapas y el horizonte, es una decisión estratégica fundamental, que debe tener en cuenta el carácter del problema analizado, la información existente y otros factores adicionales, tales como la calidad de la aproximación del proceso de toma de decisiones real y la manejabilidad numérica del método, que a su vez depende del hardware y software disponible en cada momento.

Una de las conclusiones más importantes que se desprende de un modelo de este tipo son precisamente las decisiones tomadas en la primera etapa, es decir, las decisiones iniciales que deben tomarse antes de que se revele la nueva información. Posteriormente, la llegada de nueva información conllevará cambios en las distribuciones de probabilidades y nuevas decisiones en respuesta a las novedades. En general, el modelo deberá ser aplicado en varias ocasiones repetidamente, partiendo de la decisión tomada en la primera etapa y revisando posteriormente las estimaciones de todos los parámetros teniendo en cuenta la nueva información disponible. La revisión puede conllevar incluso la construcción de nuevos escenarios o la consideración de diferentes horizontes temporales, lo que en última instancia dependerá de los objetivos y del horizonte de inversión de las entidades gestoras de fondos de pensiones (Boulier, J-F., Trussant, E,Florens, D, 1995) .

La función objetivo refleja los objetivos del gestor. Este puede aspirar, por ejemplo, a alcanzar los mayores beneficios para el año siguiente, respetando las regulaciones de cada país. En general, el criterio se define a partir de la riqueza esperada al final de un cierto horizonte temporal. El riesgo se puede incorporar en el modelo mediante ciertas restricciones, que entran en la función objetivo a través de una función de utilidad de términos y penalizaciones adecuados (podemos tomar como ejemplo la medida de aversión al riesgo o los modelos para calcular el ***VaR*** y el ***CVaR***).

Las restricciones del modelo siguen las reglas de contabilidad de los flujos de caja en los diferentes escenarios dependientes del tiempo. Las restricciones, lineales en su mayoría, se definen a partir del balance del efectivo, del balance del inventario y de las posibles restricciones regulatorias. Las restricciones sobre la inversión en los diferentes activos o los requisitos de financiación mínima o de solvencia, se formulan a menudo como restricciones de probabilidades sobre el valor de la función objetivo de la riqueza esperada, del nivel de financiación o del nivel de la riqueza acumulada en relación con los pasivos totales al final de cada período (Dempster , 2001). Por ejemplo, en los modelos basados en escenarios, las variables binarias se pueden utilizar para el rebalanceo de las restricciones de probabilidades. Otras posibilidades se basan en resolver una secuencia paramétrica de modelos de programación hasta que se cumpla la última restricción de probabilidad, o en incorporar una penalización en la función objetivo esperada (Birge, Louveaux, 2011).

Los programas estocásticos de múltiples etapas que se utilizan en esta tesis están basados en escenarios, por lo que necesitan un árbol de escenarios como input. Las restricciones sobre las decisiones serán no anticipativas, tanto de forma implícita o de manera explícita. En ambos casos, las decisiones están basadas en los datos históricos disponibles, por lo que varios escenarios diferentes podrán tener partes idénticas.

3.3 Modelización de las variables Macroeconómicas

Este Apartado se divide en dos sub apartados. El primero presentamos el modelo de indexación general, el segundo presentamos el modelo de indexación centrado en cumplir las normas y reglamentos dictadas por el nuevo acuerdo de Basilea de 2007. La modelización de la indexación es una novedad y de vital importancia para el futuro de los pensionistas porque considerara la inflación de los sueldos y la subida de precios a la hora de hacer el pago de las pensiones usando modelos de optimización matemática.

Las características mas llamativas del modelo de indexación es la de poder incluir en las restricción aspectos muy importantes como el de falta de financiación, la solvencia del fondo y el capital mínimo requerido. Existen otros modelos de indexación para mas información el lector puede consultar la bibliografía de la tesis para profundizar mas aspectos sobre el modelo de indexación. El modelo que presentamos en este apartado es el que mejor se adapta en el problema que estamos estudiando en la tesis y con la ventaja de poder incluir en el modelo final de la tesis que será presentado en el próximo capitulo (Sibrand Drijver, 2005).

3.3.1 El Modelo de Indexación

Debido a la inflación, es posible que los jubilados tengan un poder adquisitivo mucho menor a la hora de su jubilación que el que esperan conseguir por los derechos acumulados durante los años de trabajo. Los fondos de pensiones se esfuerzan en corregir los efectos de la inflación en los derechos de los participantes. Sin embargo, en general, la indexación de los derechos está condicionada a la posición financiera del fondo. Las decisiones de indexación son de suma importancia en la gestión de los fondos, y afectan a los participantes activos y los pasivos.

Esto contrasta con un esquema de ingresos finales en el que sólo aquellos que ya están retirados o en otro modo inactivo sufren de indexación incompleta. Como se mencionó anteriormente, en los últimos años no todos los fondos fueron indexados, hay algunos que tuvieron una indexación parcial, muy pocos una indexación completa y otros que ni siquiera han sido indexados. En esta sección vamos a explicar cómo la política de indexación de un fondo de pensiones puede ser modelizada en un modelo de gestión de activos y pasivos (ALM) de recursos múltiples (Van Ewisk, 2005).

Al final de cada año, los administradores del fondo de pensiones decidirán en qué medida se indexarán los derechos adquiridos de los pensionistas, con un máximo dado por la inflación de los precios de ese año. Sean i_t la decisión inicial de indexación para el año t, y ω_t el aumento de los salarios en el año t, siendo ambos factores multiplicativos de los derechos adquiridos. Entonces se debe considerar que la decisión de indexación debe pertenecer al siguiente intervalo:

$$\textbf{(3.1)}\quad 1 \leq i_t \leq \omega_t$$

La indexación total no puede exceder la inflación de los precios. La condición de no negatividad expresa la importancia de la reparación de la indexación en el futuro, y garantiza que la indexación no puede ser ignorada o revertida. La decisión de indexación para cada año s en el tiempo $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{s} < \boldsymbol{t})$, que denotaremos por $\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{t}}^{\boldsymbol{s}}$, es igual a la decisión inicial de indexación más la suma de todas las reparaciones:

(3.2)

$$\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{t}}^{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{i}_{\boldsymbol{s}} + \sum_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{s}+\mathbf{1}}^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{s}}}$$

Con las condiciones

$$\textbf{(3.3)} \qquad \mathbf{1} \leq \boldsymbol{i}_{\boldsymbol{t}}^{\boldsymbol{s}} \leq \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{s}}$$

$$\textbf{(3.4)} \qquad \boldsymbol{i}_{\boldsymbol{t}}^{\boldsymbol{s}} \geq \boldsymbol{i}_{\boldsymbol{t}-\mathbf{1}}^{\boldsymbol{s}}$$

El valor actual de los pasivos en el momento t originados en el año s viene dado por

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}^{\boldsymbol{s}} = \prod_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{s}+\mathbf{1}}^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{i}_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{s}} \cdot \underline{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{t}}^{\boldsymbol{s}}$$

En donde $\underline{L}_t^s$ es el valor nominal de los pasivos en el momento t originados en el año s. Como una implementación directa de la decisión de indexación debe traducirse en una restricción para el valor actual de los pasivos, elegimos trabajar con las decisiones de indexación acumuladas. La decisión de indexación acumulada en el momento t por los derechos acumulados para percibir una pensión en el año s se define como

$$\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{t}}^{\boldsymbol{s}} = \prod_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{s}+\mathbf{1}}^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{i}_{\boldsymbol{t}}^{\boldsymbol{r}}$$

En sentido contrario, obtenemos:

$$i_t^s = \frac{I_t^{s-1}}{I_t^s}$$

En consecuencia, necesitamos definir las nuevas restricciones en las decisiones de indexación, equivalentes a **(3.3) y (3.4)**. La restricción **(3.3)** pasará a ser

$$I_t^s \leq I_t^{s-1} \leq \omega_s I_t^s.$$

Por lo tanto, las restricciones equivalentes a (3.3) son lineales. Sin embargo, las restricciones (3.4) pasarán a ser no lineales:

(3.5)

$$\frac{I_t^{s-1}}{I_t^s} \geq \frac{I_{t-1}^{s-1}}{I_{t-1}^s}$$

Por tanto las restricciones sobre indexaciones acumuladas son no lineales. Como en esa tesis siempre utilizamos modelos lineales, para solucionar este inconveniente de no linealidad trataremos de aproximar la restricción de indexación mediante una ecuación lineal.

Si reescribimos la ecuación (3.5) como

$$\frac{1+\epsilon_1}{1+\delta_1} \geq \frac{1+\epsilon_0}{1+\delta_0}$$

Que es equivalente a

$$(\epsilon_1 - \delta_1) - (\epsilon_0 - \delta_0) \geq \epsilon_0\delta_1 - \epsilon_1\delta_0.$$

Entonces, despreciando el producto de los términos pequeños, obtenemos la siguiente aproximación lineal de la restricción (3.5)

(3.6) $$I_t^{s-1} - I_t^s \geq I_{t-1}^{s-1} - I_{t-1}^s$$

Concluimos entonces que indexar significa corregir los pagos de las pensiones por jubilación teniendo en cuenta la inflación, algo que resulta a menudo indispensable para el correcto funcionamiento de un fondo de pensiones. Y que las restricciones de indexación pueden ser representadas mediante ecuaciones lineales e incorporadas de esta forma a los programas estocásticos lineales.

3.3.2 El modelo de indexación de acuerdo con las nuevas regulaciones.

El acuerdo de Solvencia II pretende incrementar la comprensión y el control de la posición financiera de la entidad supervisada, así como su posible evolución a corto y medio plazo. Su objetivo principal es aumentar la transparencia de las entradas y salidas del fondo de pensiones, manteniendo bajo control la solvencia del fondo.

La normativa promueve el uso de factores de descuento que tengan en cuenta la relación entre los pasivos de las instituciones y sus inversiones. En concreto, se recomienda el uso de una curva de rentabilidades para los diferentes vencimientos. Y se establecen condiciones sobre la solvencia, definida como la diferencia entre activos y pasivos. Una condición es que el grado de solvencia del fondo debe de ser mayor o igual al 5% de los pasivos. En caso contrario, se permite un periodo de recuperación de un año.

Otra condición afecta a la probabilidad de la falta de financiación del fondo en el año siguiente, que debe de ser menor o igual a 2.5. La tasa de contribución debe ser económica, además se desea que la tasa de contribución sea estable con el fin de prevenir la posible agitación social y insatisfacción.

En tercer lugar, se establece que la política de indexación debe ser comunicada a los participantes. Los fondos de pensiones deben construir reservas para prevenir los problemas que puedan ocurrir en el futuro en relación con la falta de financiación. Por otro lado, en el caso de dificultades financieras, de las cuales el nivel de solvencia es un indicador, los fondos deben ser cautelosos con la indexación.

Presentamos a continuación una versión matemática de las restricciones de solvencia anteriormente comentadas. Definiremos la solvencia del fondo como $\boldsymbol{S_t = A_t - L_t}$, donde $\boldsymbol{A_t}$ es el valor total de los activos en el tiempo $\boldsymbol{t}$, y $\boldsymbol{L_t}$ el valor total de los pasivos en el tiempo t.

De acuerdo con los comentarios anteriores, una restricción de solvencia que se debe cumplir es que

$$\textbf{(3.7)} \quad \boldsymbol{S_t \geq 0.05L_t}$$

En donde $\boldsymbol{S_t = 0.05L_t}$ es el capital mínimo requerido de solvencia. Si la condición **(3.7)** no se cumple, habría escasez de fondos en el momento $\boldsymbol{t}$, y los gestores deberían recuperar la solvencia del fondo en el plazo de un año. Esta condición puede representarse matemáticamente introduciendo variables binarias, que denotaremos por $\boldsymbol{u_t}$ y que interpretaremos como indicadores de falta de financiación. Las variables binarias se introducen en las siguientes restricciones:

$$\textbf{(3.8)} \quad \boldsymbol{S_t + Mu_t \geq 0.05L_t}$$

$$\textbf{(3.9)} \quad \boldsymbol{u_t + u_{t-1} \leq 1}$$

con $\boldsymbol{u_t} \in \{\boldsymbol{0,1}\}$ y $\boldsymbol{M}$ suficientemente grande, lo que quiere decir que u_t es igual a 1 cuando hay falta de financiación y 0 cuando el fondo tiene solvencia suficiente.

La siguiente condición de solvencia que comentamos anteriormente se introduce de la siguiente forma:

$$\textbf{(3.10)} \qquad \boldsymbol{P(S_{t+1} < 0 |\ S_t) \leq 0.025}$$

Si la ecuación **(3.10)** no se cumple, habría escasez en las reservas y el fondo deberá esforzarse en cumplir con la regulación en los ejercicios futuros.

La medida a tomar es hacer un informe demostrando que el fondo se esfuerza en cumplir la condición de reserva de la ecuación **(3.10)** y tiene que preparar otro informe comprometiéndose a cumplir con dicha condición en los próximos años y la entidad supervisora le dará un tiempo de aproximado establecido por la ley general de planes y fondos de pensiones de España para que pueda cumplir con las condiciones de tal modo que $\boldsymbol{P(S_{t+1} < 0|\ S_t^R) \leq 0.025}$, donde $\boldsymbol{S_t^R}$ es la solvencia requerida. Así el valor esperado de la solvencia mínima requerida es.

$$\textbf{(3.11)} \qquad \boldsymbol{E(S_{t+1}) = \varphi L_t}$$

donde $\boldsymbol{\varphi}$ es el parámetro del riesgo.

3.4 Activos de Renta Fija: Bonos con cupones y Cupón Cero

Un Bono es un título de deuda, emitido por los gobiernos centrales, municipales, estados, bancos, corporaciones o particulares, a corto, medio o largo plazo, que se vende mediante subasta por el banco central, las empresas o los particulares, tal que el emisor se compromete con el comprador a devolver un cierto capital, llamado "valor nominal" y que denotaremos con la letra $\boldsymbol{F}$, al vencimiento, y también se compromete al pago de una remuneración periódica. Esta remuneración es llamada "cupón", se denota generalmente con la letra $\boldsymbol{C}$, y se paga periódicamente (mensualmente, semestralmente,…) en fechas acordadas entre el emisor y el comprador (titular) del Bono. El ratio $\boldsymbol{c = C/F}$ se llama tasa de interés del cupón, y se expresa en términos anuales. Se puede ilustrar los flujos de caja de un bono con cupones gráficamente de la siguiente forma (Horne, Wachowicz Jr, 2008) :

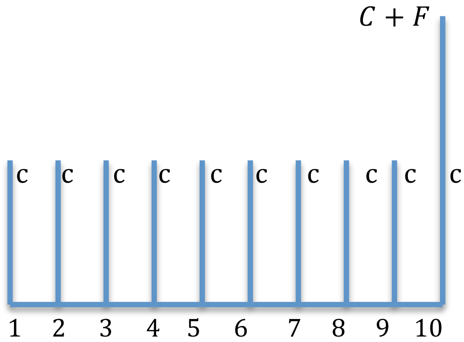

Figura 6: Flujos de Caja de un Bono con cupones

En el caso de los bonos del tesoro, el representante del gobierno es el banco central, que es la institución encargada de hacer la subasta de los bonos. Antes de cada subasta, se anuncia el valor nominal a pagar y los títulos de deuda pública disponibles para la subasta.

3.3.2 Construcción de un Bono con cupones

Consideremos por simplicidad que los pagos de los cupones se hacen anualmente. Los flujos de caja del titular (comprador) del bono son $-\boldsymbol{P}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}, \ldots\ldots, \boldsymbol{C}+\boldsymbol{F}$, donde $\boldsymbol{P}$ es el precio o cantidad de dinero invertida en la compra del bono. Dicho precio se calcula como el valor esperado de los futuros flujos de caja del bono hasta la fecha de su madurez, $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}, \ldots, \boldsymbol{C}+\boldsymbol{F}$. Supongamos que el tiempo hasta la madurez es $\boldsymbol{T}$, es decir, que en el tiempo $\boldsymbol{T}$ se paga el valor nominal más el último cupón o remuneración por el préstamo del capital. Si la evaluación de la tasa de interés es $\boldsymbol{r}$, y el respectivo factor de descuento es $\mathbf{1}/(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})$, podemos expresar el valor actual del flujo de caja presentado arriba, también llamado precio del bono, como:

$$\textbf{(3.12)} \qquad \boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{C}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{\mathbf{1}}} + \frac{\boldsymbol{C}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{2}} + \cdots + \frac{\boldsymbol{C}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{\boldsymbol{T}}} + \frac{\boldsymbol{F}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{\boldsymbol{T}}}$$

$$\textbf{(3.13)} \qquad \boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{C}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{\mathbf{1}}} + \frac{\boldsymbol{C}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{2}} + \cdots + \frac{\boldsymbol{C}+\boldsymbol{F}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{\boldsymbol{T}}}$$

$$\textbf{(3.14)} \qquad \boldsymbol{P} = \sum_{\boldsymbol{t}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{T}} \frac{\boldsymbol{C}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{\boldsymbol{t}}} + \frac{\boldsymbol{F}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{\boldsymbol{T}}}$$

3.3.3 Bonos Cupón Cero

Un Bono Cupón Cero es un bono sin cupones, por lo que son nulos todos los flujos de caja con la excepción del último, que coincide con el valor nominal. Un bono cupón cero no hace pagos periódicos por intereses, sino que se vende con un descuento sobre su valor nominal. Los tipos de interés utilizados para este tipo de bonos dependen del tiempo hasta la madurez de cada bono (Karl Sigman, 2005).

¿Por qué comprar un bono que no paga intereses? La respuesta está en el hecho de que el comprador del bono recibe la rentabilidad en un único pago. Esta rentabilidad consiste en el aumento gradual (o apreciación) del valor de su título con relación a su valor original, es decir, en que el precio de compra es inferior al valor nominal que el comprador recibirá al vencimiento (Horne, Wachowicz Jr, 2008).

La ecuación que permite calcular el precio de un bono cupón cero se obtiene sustituyendo $C = 0$ en la ecuación (3.15).

La ecuación **(3.15)** es $\boldsymbol{P} = \sum_{\boldsymbol{t=1}}^{\boldsymbol{T}} \frac{\boldsymbol{C}}{(\boldsymbol{1+r})^{\boldsymbol{t}}} + \frac{\boldsymbol{C+F}}{(\boldsymbol{1+r})^{\boldsymbol{T}}}$, para $C = 0$ obtenemos:

$$\textbf{(3.15)} \qquad \boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{F}}{(\boldsymbol{1+r})^{\boldsymbol{T}}},$$

La ecuación (3.15) es la ecuación de valoración de un bono cupón cero.

3.3.4 Curvas de Rendimiento

La curva de rendimiento es la representación gráfica que refleja la relación entre la tasa de interés o coste del préstamo pagado sobre los bonos comprados y el tiempo desde el primer periodo hasta su madurez. El rendimiento se refiere a la rentabilidad anual de la inversión y está basado en los pagos recibidos por la compra de los bonos.

Las continuas fluctuaciones en los precios de los bonos están causadas por los cambios en la tasa de interés, que depende de la oferta y la demanda de cada bono, y de la calidad de cada bono comprado (Horne, Wachowicz Jr, 2008). Esta última depende de la credibilidad o fiabilidad del emisor, y de la existencia de factores adversos como la guerra y otras posibles inestabilidades, problemas que afectan o han afectado recientemente a varios países africanos y de América Latina y de Europa del Este.

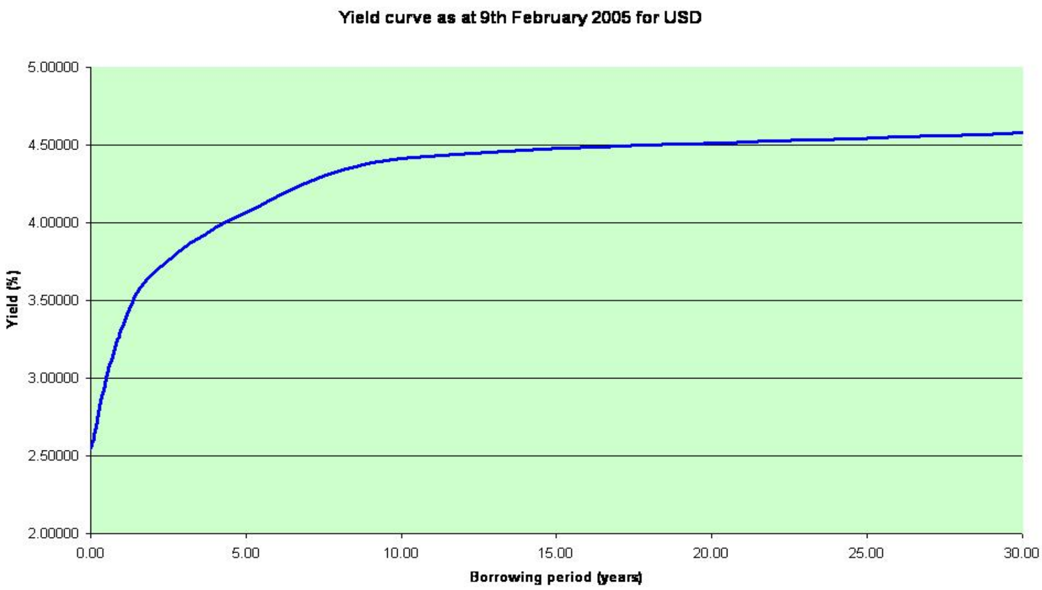

Figura 7: Curva de Rendimientos del 9 de febrero de 2005

Después de la emisión de los bonos, en general, estos son negociados en mercados secundarios con primas o descuentos sobre su valor nominal hasta su vencimiento.

Hay dos formas de analizar el rendimiento de los bonos:

1. **Rendimiento corriente**
2. **Rendimiento hasta su madurez**.

1. Rendimiento corriente

Es la rentabilidad anual obtenida en forma de remuneración por la compra de un determinado bono. Se calcula a través del cociente entre la tasa de interés anual de los bonos con cupones y el precio de compra de los bonos. Se expresa matemáticamente como:

$$\boldsymbol{RC = \frac{F.r}{P}}$$

donde $\boldsymbol{F}$- es el valor nominal, r- es la tasa de interés anual y $\boldsymbol{P}$- es el precio del bono.

2. Rendimiento hasta su Madurez

Refleja la rentabilidad total recibida por el inversor por mantener el capital hasta el vencimiento. Este tipo de rendimiento refleja el pago de todos los intereses desde el principio hasta el vencimiento, y se calcula de la misma forma que el rendimiento corriente. Debido al hecho de que este rendimiento representa la rentabilidad hasta la madurez, por lo general es más importante para los inversores calcular el rendimiento corriente. Mediante un análisis detallado, los inversores al analizar la rentabilidad en cada año, toman las decisiones de qué tipos de bonos compran, retienen y venden, dependiendo de las características de cada bono.

3.5 Gestión de una Cartera de Bonos Usando Programación Estocástica

Analizaremos en este apartado la gestión de una cartera de bonos mediante programación estocástica. Nos centraremos en analizar los valores esperados de los flujos de caja asociados a la cartera de bonos, asumiendo que se conocen los pasivos, siendo el objetivo del modelo la elección de los mejores activos para invertir en cada momento. Empezaremos comentando el modelo dinámico de gestión de la cartera de bonos, y posteriormente presentaremos su versión estocástica.

3.5.1 Modelo Dinámico para una Cartera de Bonos

Supongamos que tenemos un modelo en tiempo discreto y con horizonte temporal finito, siendo $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{1}, \dots, \boldsymbol{T}$ los posibles valores del tiempo, y que las oportunidades de inversión vienen representadas por los flujos de caja $\boldsymbol{CF_1}, \dots, \boldsymbol{CF_N}, \boldsymbol{CF_n} = (\boldsymbol{CF_{n1}}, \dots, \boldsymbol{CF_{nT}})^{\boldsymbol{T}}$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{1}, \dots, \boldsymbol{N}$. Consideremos que los costes iniciales de adquisición de los flujos de caja son $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c_1}, \dots, \boldsymbol{c_N})^{\boldsymbol{T}}$, lo que significa que c_n es el coste de la inversión en el activo n en tiempo $t = 0$. Sea $\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{L_1}, \dots, \boldsymbol{L_T})^{\boldsymbol{T}}$ el valor esperado de los pasivos en cualquier horizonte temporal. La riqueza inicial del inversor es $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{1}$, y el objetivo es la selección de los mejores activos para invertir con el fin de obtener las máximas ganancias posibles para poder hacer frente a los pagos de los pasivos. Las variables a determinar son los porcentajes de inversión en nuestra cartera $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_N})^{\boldsymbol{T}}$. En la práctica, es posible que los cálculos de los pasivos se deban hacer en cualquier instante de tiempo, y algunas veces es obligatorio seguir el rastro del balance del efectivo, hacer el cálculo de las reservas y cumplir con restricciones de solvencia. Asumiremos que los ingresos de los activos están definidos por la siguiente ecuación.

(3.16)

$$\boldsymbol{A_t = \sum_{n=1}^{N} x_n CF_{nt}}.$$

Por lo tanto la condición necesaria para hacer frente a los pagos de los pasivos en cualquier instante de tiempo t es:

(3.17)

$$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{N} x_n CF_{nt} \geq L_t}$$

Ahora bien, bajo la restricción (3.18), no existe la posibilidad de reinvertir el posible superávit (lo que nos sobra). Para remediar este problema, supongamos ahora que i es la tasa de interés de reinversión para el periodo $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t+1})$, y que $\boldsymbol{s_t^+}$ es el superávit en el tiempo t. Entonces podemos reformular la inecuación **(3.18)**, que pasa a ser la siguiente igualdad:

(3.18)

$$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{N} x_n CF_{nt} + (1 + i_{t-1}) s_{t-1}^+ - s_t^+ = L_t},$$

donde $\boldsymbol{t = 1, \dots, T}$.

Podemos asimismo imponer las restricciones a las inversiones de la cartera, con un límite superior y otro inferior:

(3.19) $\boldsymbol{b_l \leq x \leq b_u}$

En esta expresión, b_l es el límite inferior que representa las cantidades mínimas razonables de la inversión, mientras que b_u es el límite superior.

El problema de la gestión de una cartera de bonos de renta fija se resuelve hallando la solución óptima de un programa lineal: encontrar $\mathbf{min}(\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x})$ bajo las restricciones **(3.18)** o $(\mathbf{3.19})$ y **(3.20)**.

3.5.2 Aplicación de la Programación Estocástica a la gestión de una cartera de bonos

En esta sección presentaremos la versión estocástica del modelo dinámico de gestión de una cartera de bonos visto en la sección anterior, lo que se llevara a cabo mediante funciones de distribución de probabilidad discretas, que servirán para estimar los valores futuros de ciertos parámetros que hasta ahora suponíamos conocidos. Asimismo añadiremos más variables, tales como la variable que representará el posible déficit del fondo y que denotaremos por $\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{t}}^{-s}$.

Aprovechando la notación de la sección anterior usada en el modelo para bonos, supondremos que conocemos las tasas de interés de reinversión a corto plazo $\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{t}}$ para el periodo $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}+\mathbf{1})$. Presentamos a continuación la versión estocástica del modelo de la sección (**3.5.1)**.

(3.20)

$$\mathbf{min} \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}} \text{ sujeto a}$$

(3.21)

$$\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{nt}} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}} + (\mathbf{1} + \boldsymbol{i}_{\boldsymbol{t}-\mathbf{1}}) \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{t}-\mathbf{1}}^{+} - \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{t}}^{+} = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}},$$

$$\text{con } \boldsymbol{t} = \mathbf{1}, \dots \boldsymbol{T}, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{y}_{\mathbf{0}}^{+} \geq \mathbf{0}$$

aquí $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_N})^T$ es la composición de la cartera, $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c_1}, \dots, \boldsymbol{c_N})^T$ es el precio de adquisición de los futuros flujos de caja (los costes de compra de los bonos), $\boldsymbol{f_{nt}} = \boldsymbol{CF_n}$ son los flujos de caja, $\boldsymbol{y}^+$ representa el excedente y $\boldsymbol{L_t}$ los pasivos.

Como en la práctica las tasas de reinversión difícilmente son conocidas, asumiremos que $\boldsymbol{i} = (\boldsymbol{i_1}, \dots, \boldsymbol{i_{T-1}})$ son variables aleatorias con distribuciones de probabilidades discretas conocidas. También asumiremos la posibilidad de los déficit a corto plazo, que denotaremos por $\boldsymbol{y_t^{-s}}$, lo que significa reconocer la posibilidad de que para algunos escenarios y periodos de tiempo (excepto el último) no se puedan satisfacer los pasivos.

(3.22) $\quad \boldsymbol{y^{-s}} = (\boldsymbol{L_t} - \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{f_{nt} x_n} - (\boldsymbol{1} + \boldsymbol{i_{t-1}})\boldsymbol{y_{t-1}^{+}})^+.$

Obviamente, puede ocurrir que la variable anterior sea positiva, lo que en la práctica obligará a pedir prestado el capital necesario (pagando un interés más alto) o a no satisfacer el pago del pasivo. Para cada s, t consideramos las limitaciones de los flujos de efectivo que incluyen los excedentes $\boldsymbol{y^{+s}}$ y el déficit $\boldsymbol{y^{-s}}$ dependientes de los escenarios, y además se aplica una penalización $\sum_s \boldsymbol{p^s}\ \boldsymbol{y^{-s}}$ por los déficit y posibles incumplimientos asociados, que se incluye en la función objetivo. El problema resultante es.

(3.23)

$$\min \boldsymbol{c^T x} + \sum_{s} \boldsymbol{p^s}\ \boldsymbol{y^{-s}}$$

sujeto a

(3.24)

$$\sum_{n=1}^{N} f_{nt}x_n + (1 + i_{t-1}^{s})y_{t-1}^{+s} - y_t^{+s} + (1 + i_{t-1}^{s} + \delta)y_{t-1}^{-s} + y_t^{-s} = L_t,$$

$$\forall_s, 1 \leq t \leq T - 1.$$

(3.25)

$$\sum_{n=1}^{N} f_{nT}x_n + (1 + i_{T-1}^{s})y_{T-1}^{+s} - y_T^{+s} - (1 + i_{T-1}^{s} + \delta)y_{T-1}^{-s} = L_T$$

con $x, y^{+s}, y^{-s} \geq 0, s = 1, \ldots, S$

Este problema puede ser generalizado incrementando el nivel de aleatoriedad mediante flujos de caja y pasivos que dependen de los escenarios. También se puede extender añadiendo más ecuaciones que representen la contabilidad de los pasivos, las posibles restricciones de las políticas de inversión o el balance de inventario. Estas generalizaciones serán utilizadas en el modelo que proponemos en esta tesis y que será introducido en el Capitulo 4, y que es una versión generalizada del modelo presentado en esta sección.

El objetivo del proceso de decisión se puede especificar de varias formas, como la minimización del coste de la inversión inicial o la maximización de la riqueza final esperada. En otros casos, se trata explícitamente de encontrar una decisión que satisfaga simultáneamente varios criterios de optimización, usando el modelo de Markowitz que consiste en maximizar el rendimiento esperado y minimizar el riesgo, definido mediante alguna medida del riesgo adecuada.

3.6 Generación del Árbol de Escenarios para la Rentabilidad de los Activos.

Asumiremos en nuestro estudio que los bonos que seleccionamos para nuestras inversiones son bonos corporativos o bonos gubernamentales. Debido a los problemas que se suelen encontrar en la práctica para recopilar información útil, los métodos basados en la generacion de escenarios deben adaptarse a la situación habitual de un bajo nivel de informacion sobre los datos historicos. La solución habitual consiste en construir, para representar las rentabilidades de los activos, escenarios simulados de vectores autoregresivos (VAR) que verifican la propriedad de Markov (Kjetil Høyland, Stein W Wallace, 2001).

Asumimos que el tiempo es discreto y que evoluciona siguiendo unas etapas predefinidas, que las distribuciones de series de tiempo son multidimensionales y que las rentabilidades siguen procesos auto regresivos. Si las denotamos por r_{it}, para todos los activos con $i = 1, \dots, I$ y $t = 1, \dots, T$, entonces su evolución temporal se puede describir de la siguiente forma:

$$\textbf{(3.26)} \qquad W_t = \mu + A\omega_{t-1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0, \Sigma).$$

Donde $\boldsymbol{\omega_{it}} = \mathbf{ln}(\mathbf{1} + \boldsymbol{r_{it}})$, $\boldsymbol{\Sigma}$ es la matriz de covarianzas que se usa para describir las variables $\boldsymbol{\varepsilon_t}$, A es una matriz que contiene información estimada a partir de los datos históricos, y que servirá para estimar las futuras rentabilidades.

Los parámetros requeridos por el modelo son $\boldsymbol{\sigma_{ij}}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} = \mathbf{1}, \dots \boldsymbol{N}$, son los elementos de la matriz de covarianza Σ de la rentabilidad de los activos, $\boldsymbol{S_m}$, $\boldsymbol{K_m}, \boldsymbol{m} = \mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{N}$ son respectivamente los coeficientes **Skewness** y **Kurtosis** que servirán para medir la asimetría de la función distribución de probabilidad usada, y analizar la cola de la función distribución de probabilidad, $\boldsymbol{\theta_i^{lo}}, \boldsymbol{\theta_i^{up}}$ son respectivamente el precio de compra y el precio de venta de cada bono, ω_i, ω_j, el peso para los activos dados por la matriz de covarianza del retorno de los activos, $\boldsymbol{e^{-r}}$ el factor de descuentos para los activo libre de riesgo, $\boldsymbol{P_{oi} = 1, i = 1, \ldots,}$ es el precio promedio del activo i.

$$\text{(3.27)} \qquad \boldsymbol{A_t = A_{t-1}(1 + r_t) + C_t - P_t}$$

El valor total de activos en tiempo t, es dado por la rentabilidad total de los activos iniciales $(\boldsymbol{A_{t-1}(1 + r_t)})$, mas la contribución activa de los participantes activos del fondo C_t, menos los pagos de las pensiones del grupo de jubilados $\boldsymbol{P_t}$.

3.7 Los Pasivos

Mediante el pago de las primas durante su vida laboral, los participantes acumulan los derechos de pensión que se pagarán a partir de una cierta edad (por ejemplo, la edad de 65 años). Estos pagos representan los pasivos de los fondos de pensiones. A lo largo de los años, los pasivos cambian debido a tres factores: factores actuariales, factores financieros (las tasas de interés) y la indexación (Hoevenaars , 2008). A continuación esbozamos las líneas principales de un modelo para el cálculo de pasivos en un plan de pensiones de prestación definida.

Debido al hecho de que la mayoría de los pagos de pensiones se llevarán a cabo en el futuro, tenemos que descontar estos flujos de efectivo. Los fondos de pensiones necesitan valorar sus pasivos mediante el valor actual de mercado, y todos los flujos de caja futuros deben ser descontados a las tasas de mercado actuales.

Los factores actuariales incluyen el nivel y la duración de los flujos de caja nominales de los derechos de pensión adquiridos. Los factores de este tipo representan las tendencias demográficas, las edades de jubilación, los niveles de empleo y las tasas de mortalidad. Aparte de esos supuestos no tomaremos ningún riesgo más en cuenta.

Ya tenemos toda la información necesaria para calcular el valor nominal de los pasivos de nuestro fondo de pensiones. Primero vamos a introducir la notación: ${}_{k}q_{x,t}$ es la probabilidad de que una persona de edad x en el tiempo t muera antes de k años, ${}_{k}p_{x,t}$ es la probabilidad de que una persona de edad x en el tiempo t sobreviva k años más. Donde obviamente ${}_{k}p_{x\,t} = 1 - {}_{k}q_{x\,t}$. El valor actual de los pagos del primer año en los próximos años será $v = \frac{1}{(1+r^{12})^{1}}$.

Por tanto, el valor actual actuarial de una renta vitalicia unitaria viene dado por la siguiente ecuación:

(3.28)

$$\ddot{a}_{x,t} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k}\, {}_{k}p_{x,t}$$

Y el valor de una renta diferida viene dado por.

(3.29)

$$_{n|}\ddot{a}_{x,t} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k}\, {}_{k}p_{x,t} - \sum_{k=0}^{n-1} v^{k}\, {}_{k}p_{x,t} = \sum_{k=n}^{\infty} v^{k}\, {}_{k}p_{x,t}$$

A continuación se definen los derechos totales acumulados de los participantes activos de la edad x en el tiempo t como:

(3.30) $$\boldsymbol{DA_{x,t} = part_x \cdot media(sueldo_t) \cdot grupoporedad_{t,x} . alfa}$$

Los derechos totales acumulados de los participantes activos de edad x en el tiempo t se definen como el porcentaje de las personas que trabajan a la edad $\boldsymbol{x}$ **(**$\boldsymbol{part_x}$ **)**, multiplicado por el sueldo promedio del individuo a la de edad x **(**$\boldsymbol{media(sueldo_t)}$**)**, multiplicado por el tamaño total de la población trabajadora de personas que tienen edad $\boldsymbol{x}$ en el tiempo $\boldsymbol{t}$ **(**$\boldsymbol{grupoedad_{t,x}}$**)**, multiplicado por el porcentaje del sueldo que se desea consolidar como pensión (alfa).

Así que los pasivos totales de los participantes activos serán

(3.31)

$$\boldsymbol{L_t^{at} = \sum_{x=25}^{65} DA_{x,t} \cdot (\, 65 - x|\ddot{a}_{x,t})}$$

De la misma forma se calcula el valor total de los participantes pasivos, es decir de los que ya están jubilados.

(3.32)

$$\boldsymbol{L_t^{jub} = \sum_{x=65}^{100} DP_{x,t} \cdot \ddot{a}_{x,t}}$$

Donde DP se calcularía a partir del último sueldo percibido.

Los responsables de la gestión del fondo de pensiones deben maximizar las rentabilidades de los activos a fin de poder hacer frente a todos los pagos de los pasivos. Con tal finalidad, deben llevar a cabo un control estricto del crecimiento de los pasivos y del nivel de indexación. En la exposición anterior solo se han tenido en cuenta los pasivos relacionados con los participantes activos y los relacionados con los participantes jubilados. Obviamente el análisis se puede extender a los participantes que se jubilan antes de tiempo, introduciendo una penalización por jubilación anticipada, algo que no llevaremos a cabo para no extender demasiado la explicación.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS

En este capítulo presentaremos los resultados obtenidos en nuestra investigación. Comenzaremos describiendo el modelo matemático usado, y posteriormente presentaremos las aplicaciones prácticas del modelo, explicando también sus ventajas y desventajas. Trataremos de modelizar la evolución de la rentabilidad a medio y a largo plazo de nuestra riqueza, asociando una probabilidad para cada valor posible de la rentabilidad, a fin de tomar la mejor decisión en cada momento.

4.1 La Motivación

El colapso de los mercados financieros a finales de 2008 dejó a muchos fondos de pensiones en España con un alto déficit de financiación. Esto ha obligado a muchos fondos de pensiones de España a reducir los derechos de pensión acumulados.

Algunos estudios realizados en este periodo han revelado que el 90% de los planes de pensiones de prestación definida del sector privado en la Unión Europea y Estados Unidos, no tienen financiación suficiente para hacer frente a los pagos de sus pasivos. La razón fue, en una mayoría de los casos, la mala calidad de la modelización usada en estas empresas, habiendo incluso casos en que no se utilizaron modelos estocásticos. Aunque obviamente no se puede asumir que este fuera el único problema para los fondos de Pensiones en España (Frank J. Fabozzi S. M., 2005).

Cuando tenemos que tomar una decisión, cuya eficacia depende de acontecimientos futuros, debemos asumir que no conocemos toda la información, y ser conscientes de los riesgos que corremos si nos equivocamos a la hora de tomar la mejor decisión. La programación estocástica es la mejor herramienta para solucionar este tipo de problemas, ya que los escenarios estocásticos simulan todos los posibles acontecimientos futuros (Frank J. Fabozzi S. V., 2012).

Las predicciones futuras se obtienen asumiendo que se conoce la distribución de probabilidad, a partir de ahí se calcula la rentabilidad esperada en cada etapa, respetando las ecuaciones del balance del efectivo, de inventario de los bonos, de beneficio o pérdidas, las restricciones de solvencia, y maximizando la riqueza total esperada. Por otro lado, con estas simulaciones tenemos más información sobre el futuro, ya que nos dan información aproximada del comportamiento de los activos en los escenarios considerados, lo que permite tomar las decisiones óptimas de inversión.

Son muchas las ventajas de la Programación Estocástica, entre ellas se destacan las siguientes:

- La consideración de múltiples periodos, que corresponden a la naturaleza dinámica del problema, pudiendo así actualizar los flujos de efectivo, reequilibrar la cartera de inversiones, etc.

- El tratamiento adecuado de la incertidumbre, la cual está representada en ciertos parámetros presentes, por ejemplo, en las pérdidas y los flujos de efectivo. Estas incertidumbres generan el denominado riesgo de liquidez.

- La actitud frente al riesgo, la capacidad de dar cuenta de la actitud de tolerancia o aversión al riesgo del decisor.

- La consideración de los costes de transacción, lo que implica tener en cuenta los gastos incurridos en las transacciones, por ejemplo las comisiones.

- La integración de los activos y pasivos, abordando así de forma íntegra el proceso de planificación financiera.

- La facilidad de comprensión, de forma que el modelo pueda ser explicado a los administradores del fondo y a otros usuarios;

- Otros factores, como por ejemplo las restricciones normativas, y institucionales legales.

4.2 Un modelo de Gestión de Activos y Pasivos para Fondos de Pensiones

Son muchas las aplicaciones de los modelos de gestión de activos y pasivos, con el propósito principal de ayudar a los inversores a corto y largo plazo, que quieren lograr ciertos objetivos y conocer las obligaciones futuras. Estas aplicaciones tienen interés para las empresas de seguros, bancos comerciales, inversores privados, fondos de pensiones, etc.
(Zenios, S. A, W. T. Ziemba, 2004).

Nuestra contribución con esta tesis consiste en construir modelos matemáticos para hacer una mejor gestión de los activos y pasivos de los fondos de pensiones, respetando las regulaciones de cada país, a fin de obtener la mayor información posible acerca del futuro usando la programación estocástica y las herramientas explicadas en los capítulos anteriores.

Nos centramos en el Plan de Beneficio Definido, que proporciona a los participantes una pensión fija durante su jubilación, y de forma que los posibles beneficios adicionales obtenidos se reparten entre los participantes. Esta pensión por jubilación es un valor fijo, y las fórmulas matemáticas actuariales son usadas para calcular el valor de cada pensión. En esta tesis defendemos que la mejor forma de gestionar un fondo es mediante simulaciones que ayuden a los gestores a tomar las mejores decisiones bajo incertidumbre.

4.3 El Modelo

Nuestro modelo de programación estocástica para la gestión de activos y pasivos de un fondo de pensiones, se puede clasificar como un programa estocástico basado en escenarios con restricciones lineales. En la práctica, algunos requisitos relacionados, por ejemplo, con exigencias contables, pueden requerir el uso de variables enteras. Sin embargo, aquí se presentará una versión simplificada con el fin de mantener el modelo manejable numéricamente.

El objetivo del modelo es maximizar la riqueza total esperada menos la penalización total en todas las etapas. A continuación se muestran las ecuaciones del modelo, entre las que destacan las que controlan las compras y ventas de los activos mediante las ecuaciones de balance del efectivo, que sirven para seguir el rastro del dinero en cada momento en el tiempo. Hemos elegido este enfoque para modelizar algunos requisitos de las previsiones financieras y ser capaces de distinguir entre los resultados de la contabilidad de los beneficios y los flujos de caja, lo que es crucial para el gestor del fondo de pensiones bajo la legislación española.

1) Parámetros del Modelo

$\boldsymbol{r}$-la tasa libre de riesgo, usada para la capitalización de los beneficios de la función objetivo.

$\boldsymbol{W_1}$-la riqueza total del fondo de pensiones en el comienzo del periodo 1.

$\boldsymbol{\beta}$-El coeficiente para los costes de transacción, expresado como un porcentaje del valor comprado o vendido.

$\boldsymbol{\gamma}$- El termino de penalización en la función objetivo.

$\boldsymbol{S}$- son los respectivos escenarios del modelo para cada etapa.

Para el periodo $(\boldsymbol{t},\boldsymbol{t}'),\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}_{t'}$

$\boldsymbol{y^{+}_{t,s}}$- el dinero en efectivo (con signo positivo) al final de cada periodo en la función objetivo.

$\boldsymbol{y^{-}_{t,s}}$- el dinero en efectivo (con signo negativo) al final de cada periodo en la función objetivo.

$\boldsymbol{d_{t'}}$- El factor de descuento, $\boldsymbol{d_{t'}} = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{r})^{\boldsymbol{t}}}$.

$\boldsymbol{r_{1,t,s}}$–La tasa de rentabilidad del activo libre de riesgo.

$\boldsymbol{r_{t,t',s}}$- La tasa de rentabilidad de los bonos comprados en el comienzo del periodo t, vendidos en el periodo t'.

$\boldsymbol{F_{t,s}}$- Los flujos de caja para los participantes.

$\boldsymbol{L_{t,s}}$ –Los pasivos nominales.

$\boldsymbol{p_{t,s}}$- La probabilidad en cada escenario s.

2) Variables de Decisión

(no-negativas) $\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}_{t'}$, i- los activos , $\boldsymbol{i} = \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{I}$.

$\boldsymbol{H_{i,t,t',s}}$- El valor de los bonos comprados en $\boldsymbol{t}$ y retenidos en el periodo $\boldsymbol{t'}$, valorados al precio de compra de cada activo.

$\boldsymbol{S_{i,t,t',s}}$- El valor de los bonos comprados en el comienzo del periodo t, y vendido al comienzo del periodo t', valorados al precio de compra de cada bono.

$\boldsymbol{B_{i,t',n}}$- El valor de los bonos comprados al comienzo del periodo t, valorados al precio de compra.

3) Ecuaciones del Modelo

Consideramos que $\tau = \boldsymbol{0}, \dots, \boldsymbol{t-1}; \boldsymbol{t} = \boldsymbol{1}, \dots, \boldsymbol{T}$ **y** $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{N_t}$.

3.1) Ecuación de Inventario de los Activos

Hay una ecuación de inventario para cada activo $\boldsymbol{i} \in \{\boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{I}\}$ y para cada escenarios. Su formulación es la siguiente:

$$\boldsymbol{H_{i,t,t+t',s} = B_{i,t,s} - \sum_{\tau=0}^{t'-1} S_{i,t,t+\tau,s}}$$

3.2) Contabilidad del Beneficio/Contabilidad de la Pérdida.

Los cálculos involucrados tienen en cuenta la rentabilidad obtenida mediante la venta de los activos menos los costes de transacción expresados como un porcentaje de los ingresos y gastos, más los ingresos netos, más las variables de desviación que nos permitirán posteriormente definir las penalizaciones de la función objetivo.

$$\boldsymbol{X_{1,t,s} + \sum_{i=2}^{I} \sum_{\tau=0}^{t-1} (1 + r_{i,\tau,t,s}) * S_{i,\tau,t,s} - \sum_{i=2}^{I} B_{i,t,s} -}$$

$$\sum_{i=2}^{I} \boldsymbol{\beta}_i \left(\sum_{\tau=0}^{t-1} \left(\mathbf{1} + \boldsymbol{r}_{i,\tau,t,s} \right) * \boldsymbol{S}_{i,\tau,t,s} + \boldsymbol{B}_{i,\tau,t,s} \right) + \boldsymbol{y}_{t,s}^{-} - \boldsymbol{y}_{t,s}^{+} + \left(\boldsymbol{F}_{t,s} - \boldsymbol{L}_{t,s} \right) = \mathbf{0}$$

No incluiremos en el modelo las posibles tasas y impuestos.

3.3) Ecuación de Balance del Efectivo

Especifica que el dinero en la cuenta de depósito al principio del periodo anterior más la entrada de efectivo (que se calcula mediante la rentabilidad de los activos vendidos) menos la salida de los flujos de efectivo (a causa de los activos comprados y de los costes de transacción) debe ser igual a la cantidad de dinero en la cuenta de depósito al final del periodo. Esta es la idea que se describe mediante la siguiente ecuación.

$$\boldsymbol{X}_{1,t,s} = \left(\mathbf{1} + \boldsymbol{r}_{1,t-1,t,s} \right) * \left[\boldsymbol{X}_{1,t-1,s} + \sum_{i=2}^{I} \sum_{\tau=0}^{t-1} \left(\mathbf{1} + \boldsymbol{r}_{i,\tau,t-1,s} \right) * \boldsymbol{S}_{i,\tau,t-1,s} - \sum_{i=2}^{I} \boldsymbol{B}_{i,t-1,s} \right.$$

$$\left. - \sum_{i=2}^{I} \boldsymbol{\beta}_i \left(\sum_{\tau=0}^{t-1} \left(\mathbf{1} + \boldsymbol{r}_{i,\tau,t-1,s} \right) * \boldsymbol{S}_{i,\tau,t-1,s} + \boldsymbol{B}_{i,t-1,s} \right) \right] + \boldsymbol{F}_{t,s} - \boldsymbol{L}_{t,s}$$

3.4) Las restricciones sobre los beneficios:

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{\tau=0}^{t-1} \boldsymbol{r} * \boldsymbol{S}_{i,\tau,t,s} \geq \boldsymbol{i}_{r}^{s} * \boldsymbol{L}_{t,s}$$

3.5) Las decisiones de Indexación.

$\boldsymbol{S}_t = \frac{A_t}{L_t} > \mathbf{1,6}$ se indexa; si $\boldsymbol{S}_t = \frac{A_t}{L_t} < \mathbf{1,6}$ no se indexa.

3.6) La función objetivo

La función objetivo refleja matemáticamente el objetivo del gestor del fondo de pensiones. En el lado izquierdo de la suma se pretende obtener los mayores beneficios para los próximos años, lo que promueve la inversión en activos con elevadas tasas de rentabilidad. Por otro lado, es importante mantener la liquidez del fondo, lo que se consigue introduciendo en el lado derecho de la función objetivo las penalizaciones asociadas a la posible falta de liquidez que pueden darse durante el periodo analizado. Esto nos lleva a la maximización de la riqueza esperada hasta el horizonte de planificación $\boldsymbol{\tau = T + 1}$ menos las penalizaciones provocadas por la posible falta de liquidez $\boldsymbol{(y^-_{t,s})}$.

$$\max\left[d_{t+1} * \sum_{s=1}^{n} p_s \left(X_{1,T,s} + \sum_{i=2}^{I} \sum_{\tau=0}^{T-1} (1 + r_{i,\tau,T,s}) * H_{i,\tau,T,s} \right) - \gamma \sum_{t=1}^{T} \sum_{s=1}^{n} y^-{}_{t,s} \right]$$

La validez de las ecuaciones se comprobó a través de los balances financieros y las cuentas de los resultados obtenidos en cada nodo del árbol de escenarios.

4.4 Resultados

Consideremos la empresa llamada "**Esperanza Invest**", tiene que gestionar el fondo de pensiones de sus empleados. Supondremos que la cantidad total inicial del fondo obtenida por la contribución de sus empleados es de 150 mil euros, el objetivo es gestionar el fondo de pensiones mediante inversiones adecuadas, a fin de maximizar la riqueza para poder hacer frente a los pagos de los pasivos futuros. El plan de pensiones considerado es de beneficio definido, y el sistema utilizado por la empresa es el sistema de capitalización, mediante el cual cada empleado paga su propia pensión. La empresa invertirá sus activos en la compra de bonos, con lo que se expone al riesgo de tipo de interés, de forma que si el valor de la tasa de interés se incrementa entonces el valor de la cartera decrece. La empresa lleva a cabo sus decisiones de inversión mediante el modelo de programación estocástica que se ha explicado en los capítulos anteriores de esa tesis.

Partiremos de un modelo de dos etapas, en cada una de las cuales la rentabilidad de los activos puede bifurcarse en dos valores alternativos. Denotaremos genéricamente por (S) y (B) tales alternativas, que se pueden identificar intuitivamente con un incremento y un decremento de la rentabilidad, respectivamente. Al final de las dos etapas tendremos entonces cuatro posibles valores finales, que denotaremos mediante (SS), (SB), (BS) y (BB). La siguiente figura muestra gráficamente los cuatro escenarios para el horizonte temporal $T = 2$.

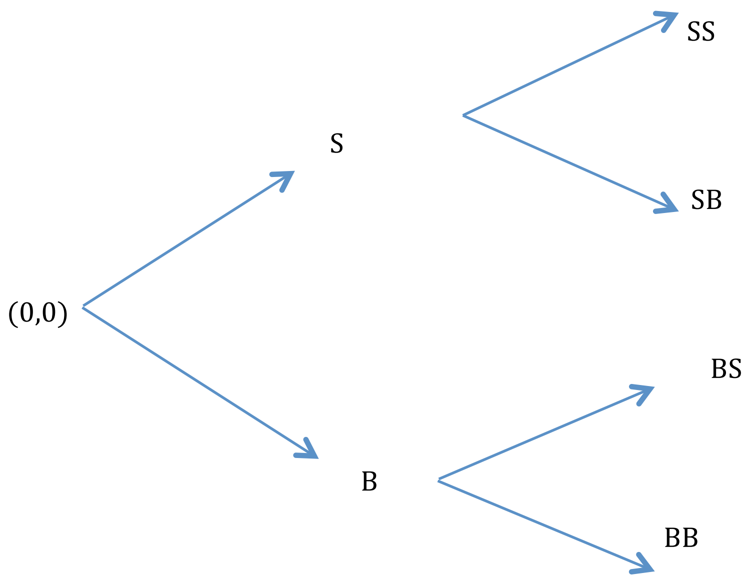

Figura 8: Árbol de Escenarios de "Esperanza Invest".

Presentaremos ahora los datos simulados que utilizaremos en el modelo, para obtener la cantidad de activos comprados, vendidos y retenidos, así como los beneficios, la riqueza en cada escenario, y la rentabilidad esperada. Los datos de partida son los siguientes:

Consideramos 4 activos, a los que llamaremos Activo1, Activo2, Activo3 y Activo4. El Activo1 y el Activo2 representan posibles tipos de inversiones inmobiliarias, mientras que el Activo3 y Activo4 representan inversiones en bonos gubernamentales y empresariales.

Las rentabilidades futuras simuladas de los activos en los que invierte "**Esperanza Invest**" vienen dadas por la siguiente tabla:

ACTIVOS	SS	SB	BB	BS
Activo1.T1	1.105539	1.105539	0.959238	0.959238
Activo1.T2	1.101119	0.986907	0.946105	1.178925
Activo2.T1	0.949268	0.949268	1.167347	1.167347
Activo2.T2	0.922778	1.16548	1.167347	0.903233
Activo3.T1	0.93393	0.93393	1.167546	1.167546
Activo3.T2	0.882627	1.211902	1.141917	0.907837
Activo4.T1	1.103528	1.103528	0.916783	0.916783
Activo4.T2	1.116279	0.936935	0.788559	1.198263

Tabla 4: Rentabilidad de los Activos.

1. Rentabilidad del efectivo libre de riesgo.

Etapas	SS	SB	BB	BS
T1	1.040323	1.040323	1.023846	1.023846
T2	1.043543	1.024186	1.007899	1.050637

Tabla 5: Rentabilidad del Efectivo.

2. Pasivos anuales de "Esperanza Invest".

Etapas	SS	SB	BB	BS
T1	76.47434	76.47434	60.953843	60.953843
T2	81.264791	66.044541	60.757200	63.608207

Tabla 6: Pasivos Anuales en Cada Escenario y Etapas

3. El valor final de los Pasivos utilizado en nuestro modelo son:

SS = 97.284751,SB = 99.094838,BB= 136.111238, BS = 133.290085.

4.4.1 Evolución de la cantidad de efectivo.

Tenemos que gestionar una cantidad inicial de 150 mil euros, mediante la política de inversiones recomendada por el modelo matemático de programación en GAMS, cumpliendo los compromisos del pago de los pasivos y respetando las políticas de solvencia. Comenzaremos mostrando la cantidad de dinero en efectivo que tendremos en cada momento para cada escenario, cuya evolución se controla mediante la ecuación de balance del efectivo que se ha comentado en una sección anterior de este capítulo. Una vez introducido el código en GAMS se obtienen los siguientes resultados, que se pueden observar en la Figura 9, dibujada a partir de los datos de la Tabla 10.

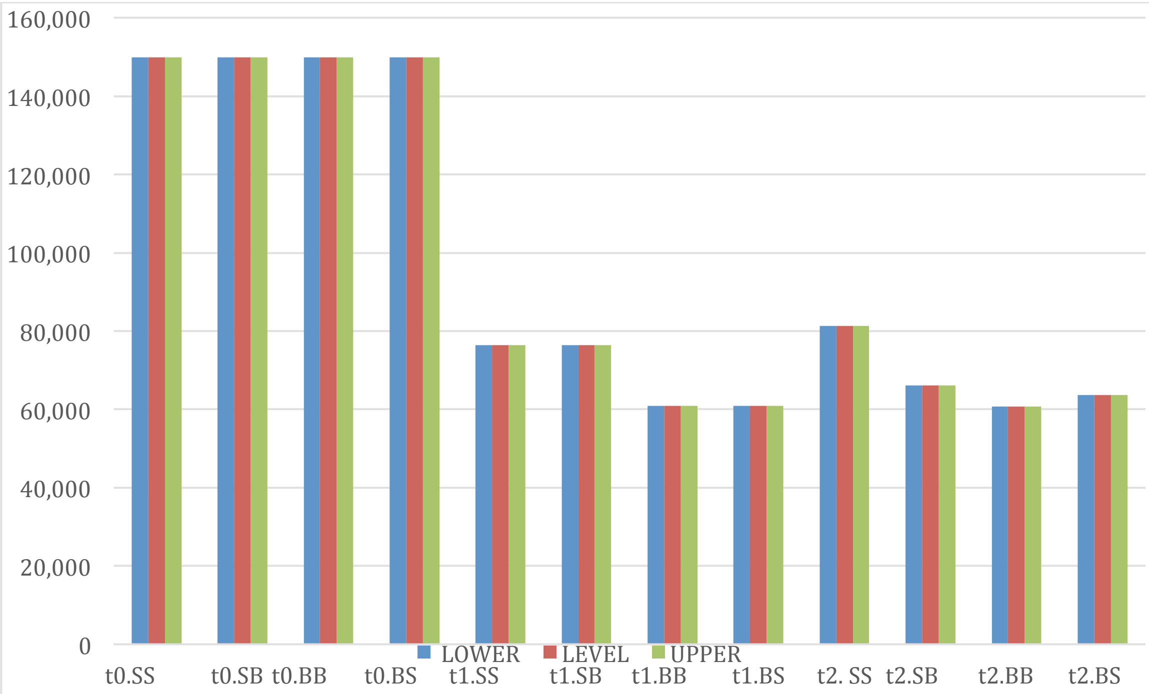

Figura 9: Balance del Efectivo en Cada Etapa y Escenario.

El valor máximo es de 150 mil euros en la etapa 0, y es igual al valor inicial a gestionar, ya que como estamos en la fase inicial o etapa cero no hacemos ninguna inversión por ser el momento que recibimos el capital, que es el mismo es los cuatro escenarios (SS), (SB), (BB) y (BS). El valor mínimo es de 60,757 mil euros en la segunda y última etapa en el escenario (BB), y es el valor que se necesita para hacer frente al pago de los pasivos en esa etapa. El dinero que falta para completar la cantidad inicial, se invierte y gestiona en la compra, venta y retención de activos dependiendo del resultado que nos da el modelo, de forma que se maximiza la riqueza teniendo en cuenta el pago de los pasivos en cada momento. También se verifica que la cantidad mínima en efectivo en la Figura 9, es casi similar al valor del dinero en efectivo en la primera etapa para los escenarios (BS) y (BB), variando solo en algunas décimas, y es 60,954. El mayor valor proporcionado por el GAMS dentro del intervalo comprendido entre 60,757 mil euros y 150 mil euros se obtiene en la segunda etapa y en el escenario SS, tomando el valor de 81,265 mil, ya que es en ese periodo cuando tenemos el valor más alto de los pasivos. En la primera etapa en los escenarios SS Y SB se obtiene 76,474 mil euros para los dos escenarios, y en la segunda etapa se obtiene un valor de 63,608 para el escenario BS. El punto medio del intervalo es de 105,3785 mil euros y la longitud del intervalo es de 89,392 mil euros. Los valores presentados coinciden con el pago de los pasivos en cada escenario, lo que significa que nuestro modelo respeta el valor de los pasivos en cada momento. Lower corresponde al menor valor que puede tomar la función, Upper corresponde al mayor valor que toma la función, Level corresponde al valor de la función. La Figura 9 se construyó a partir de los datos de la siguiente tabla 10, que representa la evolución de la ecuación del balance de efectivo.

ESCENARIO	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
t0.SS	150,000	150,000	150,000	0
t0.SB	150,000	150,000	150,000	0
t0.BB	150,000	150,000	150,000	0
t0.BS	150,000	150,000	150,000	0
t1.SS	76,474	76,474	76,474	0
t1.SB	76,474	76,474	76,474	0
t1.BB	60,954	60,954	60,954	0
t1.BS	60,954	60,954	60,954	0
t2. SS	81,265	81,265	81,265	0
t2.SB	66,045	66,045	66,045	0

t2.BB	60,757	60,757	60,757	0
t2.BS	63,608	63,608	63,608	0

Tabla 7: Datos Numéricos de la Ecuación del Balance de Efectivo.

4.4.2 Resultados de los activos comprados.

En esta sección mostraremos los activos comprados mediante el análisis de los datos proporcionados por el modelo, analizando las cantidades máximas y mínimas invertidas en cada activo en los diferentes escenarios, así como las etapas de compra de los activos. La Figura 10 que mostramos a continuación es la figura construida a partir de los datos numéricos de los activos comprados dados por el modelo.

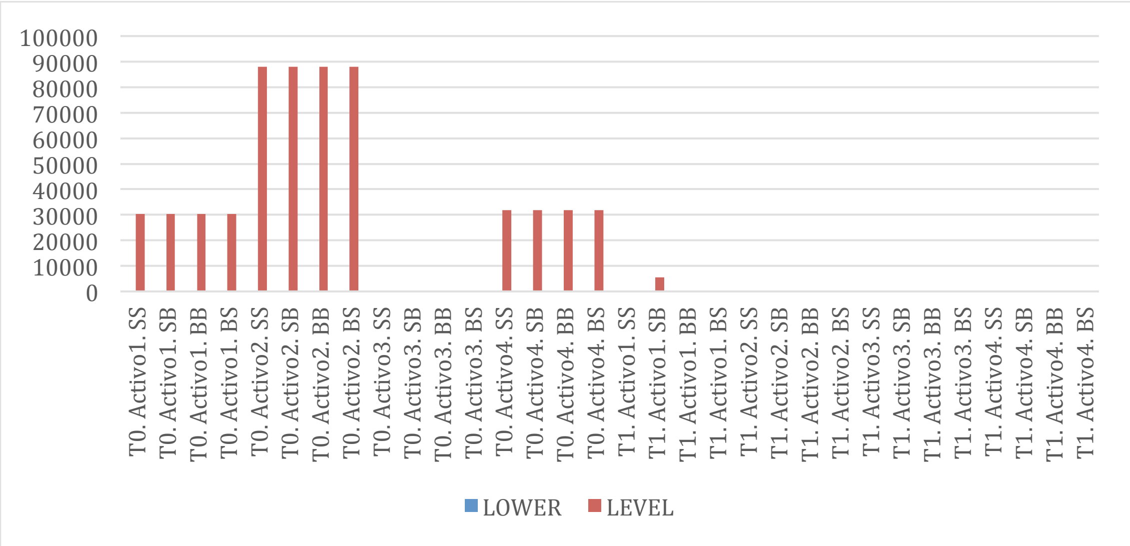

Figura 10: Cantidad de Dinero Invertido en la Compra de Activos

El modelo nos aconseja a invertir en la compra de los activos en las etapas cero y uno. Se debe invertir en la compra del Activo1 30,311 mil euros para cada uno de los cuatro escenarios, (SS), (SB), (BB) y (BS), en la etapa cero. Seguimos con la compra del Activo2 con una cantidad superior a la cantidad invertida en el activo anterior, por valor de 87,974 mil euros también en los cuatro escenarios. Se invierte más dinero en la compra del Activo2 que en el Activo1, debido al hecho de que la rentabilidad del primero es superior a la del segundo. A continuación invertimos 31,715 mil euros en la compra del Activo 4 de nuevo en los cuatro escenarios SS, SB, BB, BS. Terminamos con la inversión en la compra de activos en la primera etapa, comprando el Activo1 por valor de 5,533 mil euros en el escenario SB. Como se puede ver, este es el momento en el que invertimos la menor cantidad, debido al hecho de que el activo no tiene una rentabilidad muy alta comparado con los demás activos. Aunque en ese escenario su rentabilidad no es de las mejores, sin embargo en la primera etapa en el escenario SB el Activo1 es el que tiene la mayor rentabilidad comparando con los otros dos activos Activo2 y Activo4.

Para terminar la presentación de nuestros resultados de los activos comprados, notamos que el valor de la función varia de 0 a $+\infty$, y el valor del termino independiente varia de 0 a ε.

La figura 10 se construyó con los valores de la siguiente Tabla 11:

ESCENARIO Y ETAPAS	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
T0. Activo1. SS	0	30,311	(+ INF)	0
T0. Activo1. SB	0	30,311	(+ INF)	0
T0. Activo1. BB	0	30,311	(+ INF)	0
T0. Activo1. BS	0	30,311	(+ INF)	0
T0. Activo2. SS	0	87,974	(+ INF)	0
T0. Activo2. SB	0	87,974	(+ INF)	0
T0. Activo2. BB	0	87,974	(+ INF)	0
T0. Activo2. BS	0	87,974	(+ INF)	0
T0. Activo3. SS	0	0	(+ INF)	0
T0. Activo3. SB	0	0	(+ INF)	EPS
T0. Activo3. BB	0	0	(+ INF)	EPS
T0. Activo3. BS	0	0	(+ INF)	EPS
T0. Activo4. SS	0	31,715	(+ INF)	EPS
T0. Activo4. SB	0	31,715	(+ INF)	0
T0. Activo4. BB	0	31,715	(+ INF)	0
T0. Activo4. BS	0	31,715	(+ INF)	0
T1. Activo1. SS	0	0	(+ INF)	0
T1. Activo1. SB	0	5,533	(+ INF)	EPS
T1. Activo1. BB	0	0	(+ INF)	0

Tabla 8: Datos Numéricos del Dinero Invertido en la Compra de los Activos

4.4.3 Resultados de los Activos Vendidos

En este apartado comentamos las cantidades que vendemos de cada uno de los activos comprados anteriormente, así como las cantidades máximas y mínimas que vendemos de cada uno de los activos comprados, en los diferentes escenarios y etapas. El análisis de los activos vendidos se basa en la Figura 11, construida a partir de los datos numéricos de la Tabla 12.

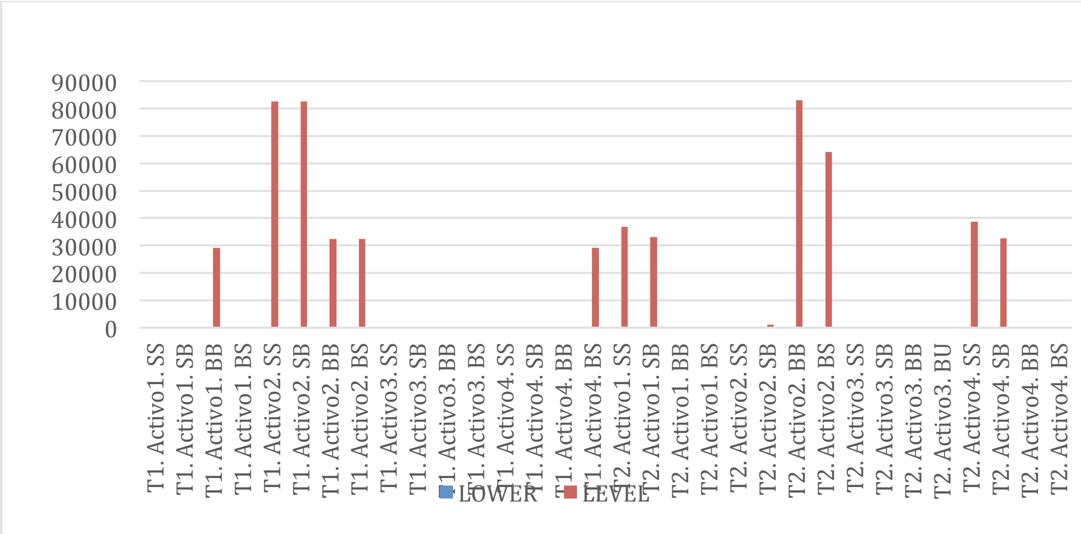

Figura 11: Cantidad de Dinero Obtenido por la Venta de los Activos.

Comenzamos con la venta del Activo2 por valor de 82 mil euros en el escenario (SB). Obsérvese que en la primera etapa y en el escenario SB, este es el activo que tiene la mayor rentabilidad comparado con los demás activos. La segunda mayor cantidad vendida es de 32,494 mil euros, obtenidos con la venta del mismo activo (Activo2) pero esta vez en los escenarios BB y BS. La menor cantidad obtenida con la venta de los activos fue recaudada con la venta del Activo4 en la primera etapa y en el escenario SB por valor de 272 euros, por ser el escenario con la rentabilidad más baja. Aunque no tenga una buena rentabilidad en el escenario SB, sin embargo el Activo4 tiene la mayor rentabilidad comparado con los demás activos en la primera etapa y en el escenario BS. Queda así puesto de manifiesto que el hecho de no tener una buena rentabilidad en un escenario determinado no significa que no debamos invertir en este activo, aunque en general se invierte menos en el escenario con menor rentabilidad y más en el escenario con mayor rentabilidad. Terminamos nuestra presentación de los resultados de los activos vendidos, con la venta de los activos en la primera etapa con la venta del Activo4 por valor de 29,075 mil euros en el escenario BS. Aunque el Activo4 tiene la rentabilidad más alta en la primera etapa en el escenario BS, no debemos olvidar que estamos en los escenarios con tendencia a la baja, así que solo vendemos una cantidad razonable de este activo.

En la segunda etapa vendemos el Activo2 en el escenario (BB) por valor de 83,038 mil euros, por ser este el momento en que tenemos la mayor rentabilidad, y de 64,251 mil euros en el escenario (BS), una cantidad inferior porque la rentabilidad en este último escenario es inferior a la rentabilidad en el escenario anterior. Posteriormente vendemos el Activo4 en la etapa 2 para el escenario (SS) por valor de 38,764 mil euros, y de 32,536 mil euros para el escenario (SB). Podemos comprobar que la cantidad vendida en la segunda etapa no varía mucho de escenario a escenario, debido a que tampoco varía mucho la rentabilidad del activo. La cantidad mínima en la segunda etapa se obtiene con la venta del Activo2 en el escenario SS por valor de 874 euros. También en la etapa 2 pero en el escenario SB obtenemos con la venta de este activo 1,104 mil euros, porque en ese escenario se registra un ligero crecimiento de la rentabilidad con relación al escenario anterior.
La **Figura 11** se obtuvo a partir de los datos de la siguiente tabla.

ESCENARIO	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
T1. Activo1. SS	0	0	(+ INF)	EPS
T1. Activo1. SB	0	0	(+ INF)	0
T1. Activo1. BB	0	29,075	(+ INF)	EPS
T1. Activo1. BS	0	0	(+ INF)	EPS
T1. Activo2. SS	0	82,564	(+ INF)	EPS
T1. Activo2. SB	0	82,564	(+ INF)	EPS
T1. Activo2. BB	0	32,494	(+ INF)	EPS

T1. Activo2. BS	0	32,494	(+ INF)	EPS
T1. Activo4. SS	0	0	(+ INF)	EPS
T1. Activo4. SB	0	0.272	(+ INF)	EPS
T1. Activo4. BB	0	0	(+ INF)	EPS
T1. Activo4. BS	0	29,075	(+ INF)	EPS
T2. Activo1. SS	0	36,898	(+ INF)	EPS
T2. Activo1. SB	0	33,071	(+ INF)	EPS
T2. Activo1. BB	0	0	(+ INF)	EPS
T2. Activo1. BS	0	0	(+ INF)	EPS
T2. Activo2. SS	0	0.874	(+ INF)	EPS
T2. Activo2. SB	0	1,104	(+ INF)	EPS
T2. Activo2. BB	0	83,038	(+ INF)	EPS
T2. Activo2. BS	0	64,251	(+ INF)	EPS
T2. Activo4. SS	0	38,764	(+ INF)	EPS
T2. Activo4. SB	0	32,536	(+ INF)	EPS
T2. Activo4. BB	0	0	(+ INF)	EPS
T2. Activo4. BS	0	0	(+ INF)	EPS

Tabla 9: Datos Numéricos de los Activos Vendidos

4.4.4 Resultados de los Beneficios Obtenidos en cada escenario.

En esa sección presentaremos los beneficios obtenidos para cada activo en cada escenario, analizando las cantidades máximas y mínimas obtenidas en cada escenario y en todas las etapas. Posteriormente analizaremos si nuestro modelo cumple con las restricciones del pago de todos los pasivos y con las restricciones de solvencia.

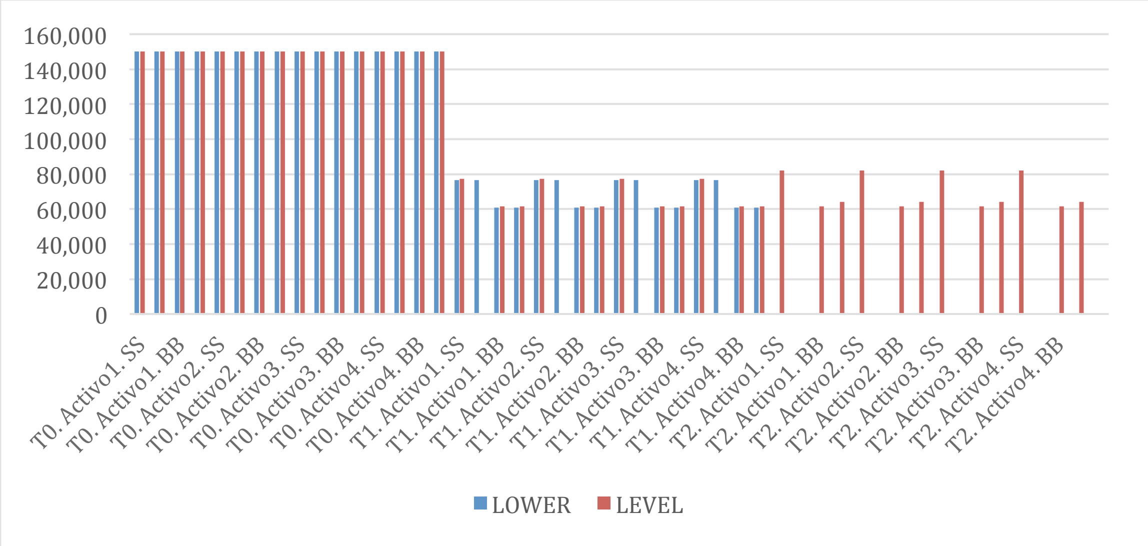

Figura 12: Beneficios Obtenidos en Cada Activo y Etapas

La ecuación del beneficio sirve para seguir el rastro de los beneficios netos en cada momento del árbol de escenarios. En la etapa cero tenemos un capital de 150 mil euros para los cuatro activos en los cuatro escenarios, ya que es el momento en que recibimos el capital para ser invertido, sin hacer cualquier operación de compra o venta.

Para la primera etapa el valor de los beneficios netos dados por el modelo es de 77,300 mil euros para el escenario (SS) y el valor mínimo del beneficio es de 76,474 mil euros, que es igual al valor del pasivo en la primera etapa para en el mismo escenario (SS). Para la misma etapa pero ahora en el escenario (SB) tenemos unos beneficios netos de 77,303 mil euros, variando solo en algunas décimas con relación al valor obtenido en el escenario anterior. Esa pequeña variación ocurre porque en la tabla de rentabilidad en algunos casos se registra una rentabilidad mayor para algunos activos en el escenario SB que en el escenario SS. El valor mínimo para el escenario SB no varía y es igual al valor obtenido en el escenario anterior SS. En los escenarios (BB) y (BS) tenemos el mismo valor para los beneficios netos, de 61,570 mil euros, mientras que el valor mínimo para los últimos dos escenarios es de 60,954 mil euros.

Después de analizar los resultados de los beneficios netos en la etapa cero y en la primera etapa, terminaremos la presentación del resultado de nuestros beneficios netos con los valores obtenidos en la segunda etapa. Los beneficios en la segunda etapa son de 82,030 mil euros para el escenario (SS), y el valor mínimo que nos da el modelo para el mismo escenario es de 81,265 mil euros, que es igual al valor de los pasivos. En el escenario (SB) el valor de los beneficios dado por el modelo es de 66,712 mil euros con un valor mínimo de 66,045 mil euros. Nuevamente el valor mínimo registrado es igual al valor del pasivo en la misma etapa y escenario, que es inferior al valor de los beneficios netos para el mismo escenario (SB). Para el escenario (BB) tenemos unos beneficios de 61,588 mil euros y un valor mínimo de 60,757 mil euros, y de nuevo el valor mínimo de los beneficios es igual al valor de los pasivos en ese escenario. Para finalizar, el valor de los beneficios netos en el escenario (BS) es de 64,251 mil euros, con un valor mínimo de 60,757 mil euros.

Con eso podemos notar que a partir de la primera etapa el valor de los beneficios superan o igualan el valor de los pasivos, que es igual al valor mínimo de los beneficios, y con eso se puede ver que nuestro modelo asegura los beneficios cumpliendo con el pago de los pasivos y respectando las duras condiciones de solvencia. Por otro lado para la primera etapa el valor mínimo de los beneficios no varía para los dos primeros escenario (SS) y (SB), variando solo el valor del beneficio neto esperado. Para los dos últimos escenarios (BB) y (BS) se tiene el mismo valor para el beneficio neto final, y lo mismo ocurre con su valor mínimo. En la segunda etapa, esta variable toma valores diferentes en los cuatro escenarios.

La Figura 12 de los beneficios fue construida a partir de los datos de la Tabla 15, que se puede consultar en el apéndice.

4.4.5 Resultado de la Función Objetivo y el valor de la Riqueza esperada para cada escenario.

En esta sección presentaremos los resultados obtenidos a través de la implementación de nuestro modelo en GAMS, explicando la riqueza obtenida en cada escenario, bien como el valor de la función objetivo, el valor de nuestros beneficios en términos porcentuales, bien como los beneficios totales anuales.

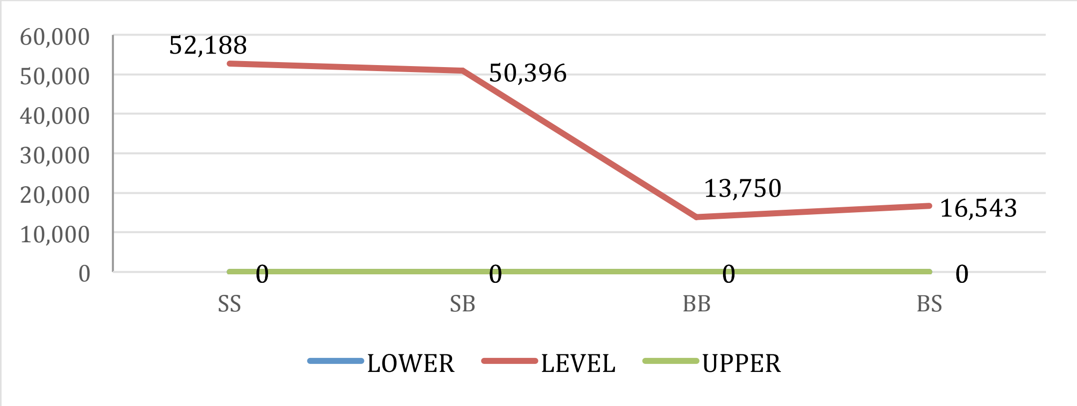

Figura 13: Variación de la Riqueza final Esperada para cada Escenario

La riqueza neta total esperada para cada escenario es de 52,188 mil euros en el escenario (SS) después de hacer frente al pago de todos los pasivos en ese momento. En (SB) el valor de la riqueza total esperada del fondo es de 50,396 mil euros, mientras que el valor mínimo dado es de 13,750 mil euros en el escenario (BB), por ser el momento que el valor total de los pasivos es más alto. En el escenario (BS) tenemos una riqueza total esperada de 16,543 mil euros.

El valor de la función objetivo z es igual a 33,2192 euros, que es el valor de la rentabilidad anual esperada de nuestra inversión, y que corresponde a unos beneficios anuales de 22,36% si todo sale como lo previsto..

La figura 13 fue construida con los datos de la siguiente tabla:

ESCENARIO	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
SS	(-infinito)	52,715	Infinito	0.25
SB	(-infinito)	50,905	Infinito	0.25
BB	(-infinito)	13,889	Infinito	0.25
BS	(-infinito)	16,710	Infinito	0.25

Tabla 10: Datos numericos de la riqueza final esperada.

4.5 DISCUSIONES

En este apartado haremos la comparación de los activos comprados, vendidos y retenidos, con costes y sin costes de transacción. Discutiremos también cuál es mejor momento para vender cada uno de los cuatro activos presentados en el capitulo anterior, cuales son los mejores activos para invertir, cuál es el mejor momento para comprar, vender y retener los activos y en qué etapa lo haremos.

4.5.1 Discusiones sobre los activos comprados

Nuestra discusión sobre la cantidad invertida en la compra de los activos se centra en la comparación entre dos figuras, que representan la cantidad invertida en la compra de activos con y sin costes de transición. Las figuras que presentaremos fueron construidas con los datos proporcionados por el modelo. La tabla de los datos será presentada en el apéndice de la tesis.

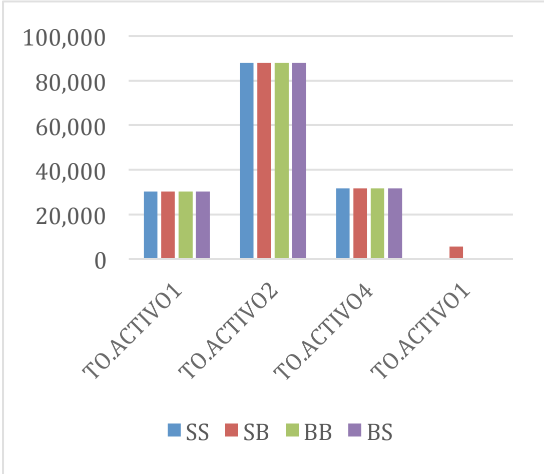

Figura 14: Activos Comprados sin coste de Transacción

Figura 15: Activos Comprados con coste de Transacción.

En las figuras 14 y 15, que aunque parezcan iguales no lo son ya que varían en algunos dígitos, fácilmente podemos notar que se invierte en la compra de los activos 1, 2 y 4, y que el mejor momento para comprar los activos es en la etapa 0 en los 4 escenarios, mientras que en la etapa uno el mejor activo para comprar es el activo1 en el escenario SB. En la etapa cero se invierten cerca de 31 mil euros en la compra de activos para los cuatro escenarios sin costes de transacción, mientras que con costes de transacción ese valor disminuye en la misma etapa y su valor es de 30 mil euros. Continuando en la etapa cero, pero ahora para el activo2, se invierte una cantidad equivalente a 86 mil euros para los cuatro escenarios sin costes de transacción, y cuando consideramos los costes de transacción este valor es de 87,974 mil euros.

Para el activo4, se mantiene en la etapa cero el valor invertido en la compra de activos sin costes de transacción, que es de 32,671 mil euros nuevamente en los cuatro escenarios, mientras que con costes de transacción el valor invertido en la compra del mismo activo es de 31,715 mil euros. Respecto a la cantidad invertida en la compra de los activos, en la etapa 1 invertimos 7,240 mil euros sin costes de transacción, mientras que cuando consideramos los costes de transacción el valor desciende hasta los 5,553 mil euros.

Para terminar nuestra discusión sobre los activos comprados, se verifica que el modelo nos aconseja invertir más cuando tenemos que pagar los costes de transacción, pero en el caso en que la cantidad que invertimos en la compra de activos sea superior a 50 mil euros el modelo aconseja invertir más cuando tenemos que pagar los costes de transacción, para poder compensar el pago de las comisiones y de los Brokers. Invertimos en tres de los cuatro activos presentados en la tabla de rentabilidades, porque estos son los activos con mayor rentabilidad, y se invierte más sobre todo en la etapa cero, y una cantidad muy pequeña en la primera etapa.

4.5.2 Discusión de los activos vendidos con y sin costes de transacción

Después de hacer la discusión de los activos comprados, ahora discutiremos la cantidad ingresada por la venta de los tres activos que compramos anteriormente, los activos 1, 2 y 4. Como en la sección anterior, procederemos a la representación de dos figuras que nos ayudarán a la hora de hacer la discusión de los ingresos obtenidos por la venta de los activos.

Figura 16: Activos Vendidos sin costes de transacción

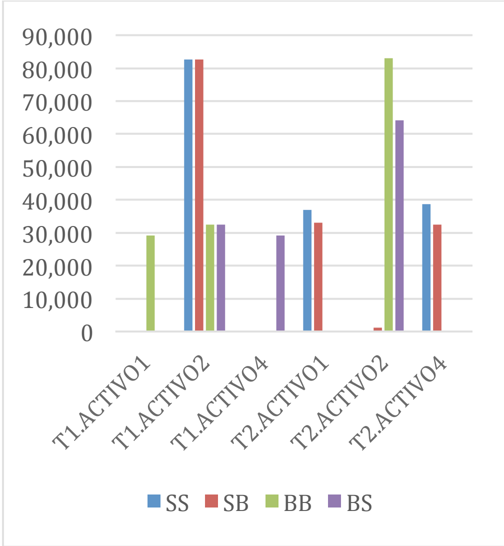

Figura 17: Activos Vendidos con costes de transacción

En la primera etapa, para el activo1, se obtienen unos ingresos con la venta de los activos por valor de 30 mil euros sin costes de transacción, mientras que con costes de transacción la cantidad ingresada es de 29,075 mil euros, en ambos casos en el escenario BB. Como se puede ver, existe una pequeña diferencia entre los ingresos obtenidos sin costes de transacción y los obtenidos con costes de transacción, que se debe a que cuando consideramos los costes de transacción tenemos que hacer frente a los pagos de las comisiones, de las transferencias bancarias, etc.

Continuando en la primera etapa, pero ahora en el activo2, ingresamos con la venta de ese activo 81,515 mil euros en los cuatro escenarios sin costes de transacción, mientras que con costes de transacción se ingresa con la venta del activo2 82,564 mil euros para los dos primeros escenarios SS y SB, pero para los dos últimos escenarios BB y BS el valor es de 32,494 mil euros. Para ese activo sin costes de transacción se ingresa la misma cantidad en los cuatro escenarios, pero con costes de transacción la cantidad ingresada para los dos primeros escenarios es diferente a la ingresada en los dos últimos escenarios.

Siguiendo en la primera etapa, pero ahora con el activo4, el modelo nos propone unos ingresos de 2,200 mil euros con la venta de ese activo en el escenario SB, y para el escenario BS ingresamos 29,953 mil euros, mientras que sin costes de transacción ingresamos con la venta de los activos 29,075 mil euros en el escenario BS. Con ese activo solo ingresamos con la venta de los activos en dos de los cuatro escenarios y no en los cuatro escenarios como es el caso de algunos de los activos anteriores. También se verifica que la cantidad ingresada en BS es muy superior a la cantidad ingresada en el escenario SB tanto con o sin costes de transacción.

En la etapa 2, para el activo1, tenemos unos ingresos de 38,012 mil euros en el escenario SS, y 34,069 mil euros en el escenario SB sin costes de transacción, mientras que con costes de transacción se obtienen 36,698 mil euros y 33,071 en los escenarios SS y SB, respectivamente. En esa etapa para el mismo activo solo ingresamos en los dos primeros escenarios, mientras que en los demás escenarios el modelo nos aconseja no vender los activos.

Continuando en la etapa 2, pero ahora con el activo2, ingresamos la cantidad máxima en el escenario BB por valor de 82,208 mil euros, y obtenemos unos ingresos de 63,608 mil euros en el escenario BS, mientras que en los escenarios SS y SB obtenemos cantidades muy pequeñas por valor de cerca de 250 euros, así que estas cantidades le añadiremos a los escenarios de mayor rentabilidad, sin costes de transacción. Con costes de transacción la cantidad máxima invertida es de 83,038 mil euros en el escenario BB, y la segunda mayor cantidad ingresada es de 64,251 mil euros en el escenario BS, mientras que para el escenario SB se ingresa 1,104 mil euros. La menor cantidad ingresada con la venta de los activos es de 800 euros en el escenario SS, debido a la baja rentabilidad obtenida en SS y SB.

Para la etapa 2, pero con el activo4, ingresamos con la venta de los activos sin costes de transacción 37,790 mil euros en el escenario SS y 31,719 mil euros en el escenario SB, mientras que con costes de transacción obtenemos 38,764 mil euros y 32,536 mil euros, en los mismos escenarios. El hecho de obtener valores mas altos con costes de transacción significa que cuando tenemos que pagar los gastos de transferencia y de los Brokers, vendemos los activos mas caros para estar en condiciones de hacer frente a estos pequeños gastos. En el cuarto activo en la segunda y ultima etapa, solo vendemos en los dos primeros escenarios SS y SB, porque es el momento en el que ingresamos la mayor cantidad con la venta de este activo según la tabla de rentabilidad presentada en el capitulo anterior. También se verifica que ingresamos más con la venta cuando consideramos los costes de transacciones, con una diferencia de un digito.

4.5.3 Discusión Sobre los Activos Retenidos

En sección discutiremos la cantidad retenida, para cada uno de los tres activos que compramos. En la etapa cero los activos retenidos son los mismos activos que compramos, pero ya en las demás etapas uno y dos, se notan cambios en los activos retenidos. Como en las secciones anteriores de ese capítulo, procederemos a la presentación de dos figuras para la discusión de los activos retenidos.

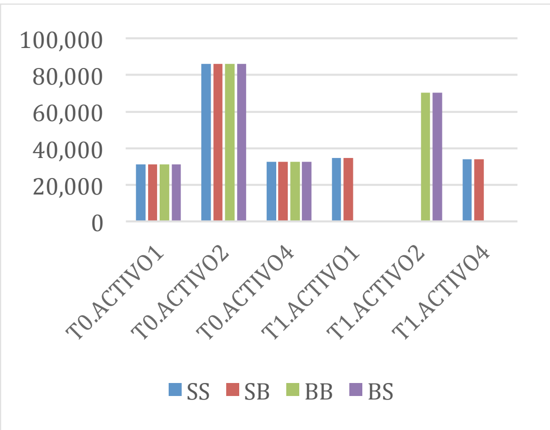

Figura 18: Activos retenidos sin costes de transacción.

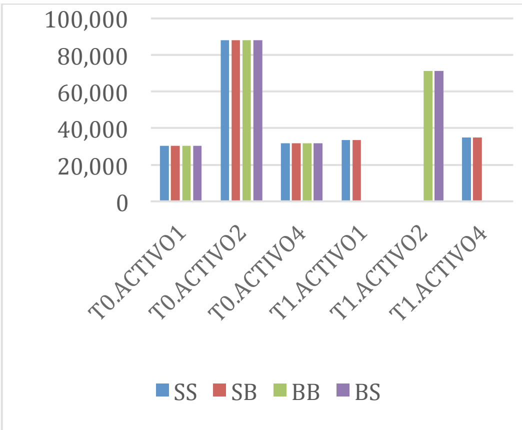

Figura 19: Activos retenidos con con costes de transacción.

En las figuras 18 y 19, se nota que el mejor momento para retener los activos es en la etapa cero y en la primera etapa con o sin costes de transacción. En la etapa cero se retiene la mayor cantidad con el activo2 por valor de 86,103 mil euros en los cuatro escenarios sin costes de transacción, mientras que con costes de transacción el valor es de 87,974 mil euros. El momento en que retenemos la menor cantidad es en la etapa cero con el activo1 por valor de 31,225 mil euros en los 4 escenarios sin costes de transacción, y cuando consideramos los costes de transacción la cantidad es de 30,311 mil euros. Continuando en la etapa cero, pero ahora para el activo 4, retenemos una cantidad por valor de 32,671 en los cuatro escenarios sin costes de transacción, con costes de transacción esa cantidad disminuye un digito y es de 31,715 mil euros en los cuatro escenarios.

Después de aclarar la discusión de los activos en la etapa cero, pasaremos ahora a la discusión de los activos retenidos en la primera etapa. En la dicha etapa, el modelo nos aconseja retener la mayor cantidad después de comprar el activo2 por valor de 70,423 mil euros sin costes de transacción, y con costes de transacción el valor es de 71,134 mil euros. En los escenarios BB y BS, la menor cantidad se obtiene reteniendo después de la compra del activo2 por valor de 34,521 mil euros sin costes de transacción, mientras que con costes de transacción el valor es de 33,510 mil euros pero ahora solo en los dos primeros escenarios que son SS y SB. Para el activo4, la cantidad retenida después de comprar es de 33,726 mil euros, la misma cantidad para los dos primeros escenarios SS y SB, y sin costes de transacción el valor es de 34,726 mil euros nuevamente para SS y SB y para el activo4.

En la primera etapa se nota una cierta diferencia con relación a la cantidad retenida en la etapa cero, pues mientras en la etapa cero se retiene la misma cantidad en los cuatro escenarios para los tres activos invertidos, en la primera etapa sin embargo el modelo tiene un comportamiento distinto, nos aconseja a retener en la primera etapa solo en los dos primeros escenarios SS y SB. Esto se comprende porque al mirar la tabla de rentabilidad (tabla 7), se ve que tenemos el valor mas elevado de los pasivos en los activos BB y BS, así que por esa razón el modelo nos recomienda a no retener los activos en estas fechas, sin vender los activos a fin de obtener el mayor beneficio para hacer frente a las obligaciones de los pasivos.

4.5.4 Discusión Sobre la Riqueza Total Esperada

Terminaremos nuestra discusión con la comparación entre la riqueza obtenida con y sin costes de transacción. Presentaremos el valor de la función objetivo para los dos casos, que serán los beneficios anuales obtenidos por usar nuestro modelo de gestión de activos y pasivos para fondos de pensiones. Descritos los aspectos que serán abordados en esta sección, pasaremos ahora a la discusión de la riqueza total esperada. Esta discusión será echa con el análisis de dos figuras que fueron obtenidas a través de los datos proporcionados por el modelo.

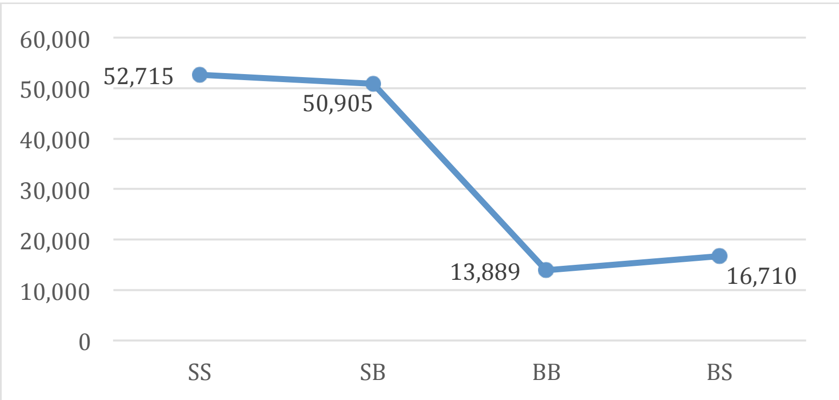

Figura 20: Riqueza final esperada sin costes de transacción

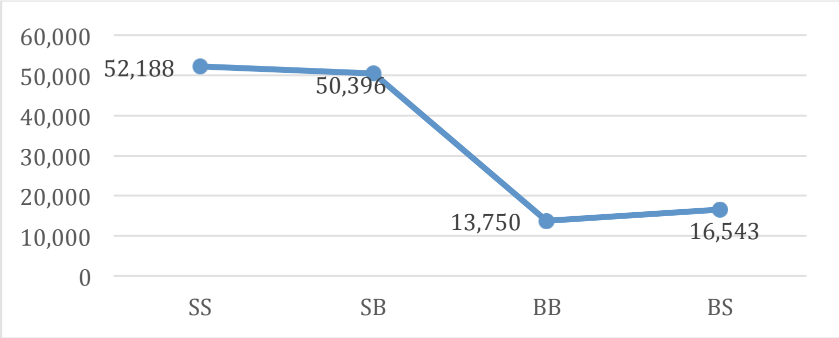

Figura 21: Riqueza final esperada con costes de transacción .

Al analizar la riqueza total esperada en las dos figuras después de hacer el pago de todos los pasivos, observamos que tiene su valor máximo en el escenario SS tanto con o sin costes de transacción, el valor obtenido es de 52,715 mil euros sin costes de transacción y de 52,188 con costes de transacción, variando solo en algunas décimas. En el peor de los casos, la riqueza total esperada es de 13,889 mil euros sin costes de transacción y de 13,750 con costes de transacción en el escenario BB, por ser el momento en que también tenemos el valor más alto de los pasivos y los casos en los que nuestras inversiones no tienen la rentabilidad esperada. Cuando se pagan los costes de transacción se verifica un ligero descenso de algunas décimas en la riqueza, debido a los pagos de los costes de transacción, tales como las comisiones, etc.

El segundo mayor valor se obtiene en el escenario SB y es de 50,905 mil euros sin costes de transacción, mientras que con costes de transacción el valor es de 50,396 mil euros. En el escenario BS la riqueza total esperada es de 16,710 mil euros sin costes de transacción, mientras que costes de transacción la riqueza esperada es 16,543 mil euros.

El valor de la función objetivo z es igual a 33,555 mil euros sin costes de transacción, y con costes de transacción es de 33,219 mil euros. El modelo nos da unos beneficios del 22,37% anual que es una cantidad elevada para el tipo de inversión que estamos haciendo. Creemos que es una rentabilidad más que razonable, una vez que por el carácter del fondo que gestionamos no podemos hacer inversiones de alto riesgo, así que lo que hicimos fueron inversiones conservadoras para no poner en riesgo el capital futuro de los activos del fondo de pensiones.

CONCLUSIÓN

En esta tesis presentamos una herramienta para la gestión de activos y pasivos de fondos de pensiones, que utiliza un modelo de programación estocástica de dos etapas y varios escenarios. Los datos históricos tienen un papel muy importante pues los datos futuros simulados dependen de los datos históricos observados. Los escenarios sirven para encontrar los diferentes resultados numéricos que son de gran importancia para los gestores de los fondos de pensiones, ya que los posibles resultados descritos en los escenarios describen el valor de las futuras incertidumbres.

El modelo que usamos distingue las ecuaciones de los flujos de caja, balances de inventario, contabilidad de la pérdida o beneficio y la función objetivo, calculando los valores futuros para cada ecuación así como el de la función objetivo. Los valores futuros de estas ecuaciones son altamente relevantes para los gestores de los fondos de pensiones. El modelo que presentamos se adecúa estrechamente a la evolución y intereses de las sociedades actuales, ya que es una versión aproximada de la realidad y su objetivo es ayudar a los gestores en la toma de decisiones de problemas de la vida real.

El aumento significativo de las empresas encargadas de gestionar fondos de pensiones y en el uso de la programación estocástica para gestionar sus activos y pasivos, se debe a la eficacia de modelos como el que presentamos. Estos modelos permiten incluir varios parámetros en su formulación, y dan a los gestores la posibilidad de saber cuál es el mejor momento para invertir teniendo en cuenta el pago de los pasivos, así como la capacidad de conocer las posibles rentabilidades futuras.

El modelo funciona, como demuestra su aplicación práctica en el ejemplo aquí comentado, y proporciona las decisiones de comprar, vender y retener que nos indican cuál es el mejor momento para invertir y cuál es el peor momento para quedarse con los activos. Permite conocer los beneficios en cada momento, y en todas las operaciones hechas se muestra el valor total de los activos en cada momento.

Así, en nuestro ejemplo, el modelo nos informa de que el mejor momento para comprar los activos es la etapa cero y para retenerlos son las etapas cero y uno; informa también de que los activos retenidos en la etapa cero son los mismos que se compran en esta misma etapa, y que los mejores momentos para vender son las etapas uno y dos; y de que se invierte básicamente en tres de los cuatro activos, el activo1, el activo2 y el activo4.

La riqueza en cada momento depende de la función de penalización; El caso en que tenemos la mayor penalización es el escenario BB, y en él se verifica una riqueza neta de 13,889 mil euros; cuando tenemos una penalización razonable y las cosas van conforme lo esperado, el valor de la riqueza es de 52,715 mil euros. El valor de los activos varía dependiendo del caso, con o sin costes de transacción: en los resultados numéricos se comprueba que la riqueza obtenida sin costes de transacción es ligeramente superior que la obtenida con costes de transacción, variando sólo en algunas décimas.

Esta fue nuestra contribución para gestión de fondo de pensiones usando programación estocástica, que a nuestro entender es la mejor herramienta en la actualidad para gestionar un fondo de pensiones. Si se hace una gestión seria de los activos y se cumplen con las duras reglas de solvencia, se logra el objetivo de hacer frente al pago de todas las pensiones, que es un derecho adquirido por los pensionistas fruto de sus muchos años de trabajo.

RECOMENDACIONES PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

Con vista a hacer más investigaciones relacionadas con el tema de esta tesis doctoral, se podrían desarrollar los siguientes aspectos, que hemos visto interesantes y prometedores en el estudio realizado.

3. **La generación de escenarios para la creación de modelos estándares para aplicar en la industria**. Esta investigación ha identificado muchos instrumentos que son esenciales para los diferentes enfoques de generación de escenarios. También se sabe que no hay una estrategia dominante para la generación de escenarios, lo que tiene gran importancia en algunos campos de la industria.

4. **Prueba de sensibilidad de los métodos de generación de escenarios para una cartera de inversión.** Como se ha expuesto en esta tesis, el método de generación de escenarios a partir del modelo VAR puede conducir a diferentes árboles de escenarios basados en los valores de diferentes puntos de partida. Se debería realizar un análisis de sensibilidad de los valores proporcionados por el modelo de optimización, para examinar la estabilidad de los resultados utilizando diferentes puntos de partida.

5. **Probar diferentes variaciones del análisis de los factores del modelo.** Examinar las diferentes interpretaciones de la curva de rendimiento, especialmente con relación al nivel, la pendiente y la curvatura, que pueden conducir a mejores parámetros econométricos y sugerir una corrección en el proceso de generación de escenarios para cada instante temporal.

6. Heurística para encontrar la solución del modelo. En aquellos casos en que queremos encontrar la solución con mayor rapidez, dado el modelo de gestión de activos y pasivos para fondos de pensiones y los valores numéricos que describen las futuras incertidumbres, se aplica la heurística para encontrar los resultados numéricos de las variables de decisión del modelo. Se necesita la heurística, ya que, debido a las variables de decisión binarias introducidas, que son necesarias para incorporar las medidas realistas de riesgo y para penalizar acontecimientos desfavorables, la optimización no es posible en un tiempo razonable y realista.

7. Programación Estocástica para el cálculo de primas de riesgo de una compañía de seguros. El método se basa en el modelo estocástico y utiliza las ecuaciones diferenciales estocásticas. Se utiliza el método para la cobertura de una cartera de seguros de vida durante un cierto periodo de tiempo, por simulación de Monte-Carlo.

8. Programación Estocástica para gestión de activos y pasivos de productos de seguro con garantías. En este caso se utilizaría la programación dinámica estocástica con múltiples etapas. Se debería implementar un modelo de gestión de activos y pasivos integrado con productos de seguros con garantías, que minimice el riesgo de impago de las garantías. La incertidumbre se representa en términos de árboles de escenarios usando cuatro factores de la curva de rentabilidad, que incluye factores macroeconómicos (inflación, rentabilidad, precio del bono, la utilización de la capacidad y el tipo de interés).

APÉNDICE

Tabla 4.4: Datos numéricos de Gams para la figura de los beneficios

ESCENARIO Y ETAPAS	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
T0. Activo1. SS	150,000	150,000	(+ INF)	0
T0. Activo1. SB	150,000	150,000	(+ INF)	0
T0. Activo1. BB	150,000	150,000	(+ INF)	0
T0. Activo1. BS	150,000	150,000	(+ INF)	0
T0. Activo2. SS	150,000	150,000	(+ INF)	0
T0. Activo2. SB	150,000	150,000	(+ INF)	0
T0. Activo2. BB	150,000	150,000	(+ INF)	0
T0. Activo2. BS	150,000	150,000	(+ INF)	0
T0. Activo3. SS	150,000	150,000	(+ INF)	0
T0. Activo3. SB	150,000	150,000	(+ INF)	EPS
T0. Activo3. BB	150,000	150,000	(+ INF)	EPS
T0. Activo3. BS	150,000	150,000	(+ INF)	EPS
T0. Activo4. SS	150,000	150,000	(+ INF)	EPS
T0. Activo4. SB	150,000	150,000	(+ INF)	0
T0. Activo4. BB	150,000	150,000	(+ INF)	0
T0. Activo4. BS	150,000	150,000	(+ INF)	0
T0. Activo4. SS	150,000	150,000	(+ INF)	0
T1. Activo1. SB	76,474	87,828	(+ INF)	EPS
T1. Activo1. BB	76,474	77.303	(+ INF)	0
T1. Activo1. BS	60,954	61,570	(+ INF)	EPS
T1. Activo2. SS	60,954	61,570	(+ INF)	EPS
T1. Activo2. SB	76,474	87,828	(+ INF)	EPS
T1. Activo2. BB	76,474	77.303	(+ INF)	EPS
T1. Activo2. BS	60,954	61,570	(+ INF)	EPS
T1. Activo3. SS	60,954	61,570	(+ INF)	EPS
T1. Activo3. SB	76,474	87,828	(+ INF)	EPS
T1. Activo3. BB	76,474	77.303	(+ INF)	EPS
T1. Activo3. BS	60,954	61,570	(+ INF)	EPS
T1. Activo4. SS	60,954	61,570	(+ INF)	EPS
T1. Activo4. SB	76,474	87,828	(+ INF)	EPS
T1. Activo4. BB	76,474	77.303	(+ INF)	EPS
T1. Activo4. BS	60,954	61,570	(+ INF)	EPS
T2. Activo1. SS	60,954	61,570	(+ INF)	0
T2. Activo1. SB	81.265	82,030	(+ INF)	0
T2. Activo1. BB	66.045	66.712	(+ INF)	0
T2. Activo1. BS	60.757	104,489	(+ INF)	0
T2. Activo2. SS	63.608	64,251	(+ INF)	0
T2. Activo2. SB	81.265	82,030	(+ INF)	0

T2. Activo2. BB	66.045	66.712	(+ INF)	0
T2. Activo2. BS	60.757	104,489	(+ INF)	0
T2. Activo3. SS	63.608	64,251	(+ INF)	0
T2. Activo3. SB	81.265	82,030	(+ INF)	EPS
T2. Activo3. BB	66.045	66.712	(+ INF)	EPS
T2. Activo3. BS	60.757	104,489	(+ INF)	EPS
T2. Activo4. SS	63.608	64,251	(+ INF)	EPS
T2. Activo4. SB	81.265	82,030	(+ INF)	0
T2. Activo4. BB	66.045	66.712	(+ INF)	0
T2. Activo4. BS	60.757	104,489	(+ INF)	0

4. **Tabla 11:Datos Numéricos de la Ecuación de los beneficios**

ESCENARIO Y ETAPAS	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
T1. Activo1. SS	76,474	77,300	(+ INF)	0
T1. Activo1. SB	76,474	77.303	(+ INF)	EPS
T1. Activo1. BB	60,954	61,570	(+ INF)	0
T1. Activo1. BS	60,954	61,570	(+ INF)	EPS
T1. Activo2. SS	76,474	77,300	(+ INF)	EPS
T1. Activo2. SB	76,474	77.303	(+ INF)	EPS
T1. Activo2. BB	60,954	61,570	(+ INF)	EPS
T1. Activo2. BS	60,954	61,570	(+ INF)	EPS
T1. Activo3. SS	76,474	77,300	(+ INF)	EPS
T1. Activo3. SB	76,474	77.303	(+ INF)	EPS
T1. Activo3. BB	60,954	61,570	(+ INF)	EPS
T1. Activo3. BS	60,954	61,570	(+ INF)	EPS
T1. Activo4. SS	76,474	77,300	(+ INF)	EPS
T1. Activo4. SB	76,474	77.303	(+ INF)	EPS
T1. Activo4. BB	60,954	61,570	(+ INF)	EPS
T1. Activo4. BS	60,954	61,570	(+ INF)	EPS
T2. Activo1. SS	81.265	82,030	(+ INF)	0
T2. Activo1. SB	66.045	66.712	(+ INF)	0
T2. Activo1. BB	60.757	61,588	(+ INF)	0
T2. Activo1. BS	63.608	64,251	(+ INF)	0
T2. Activo2. SS	81.265	82,030	(+ INF)	0
T2. Activo2. SB	66.045	66.712	(+ INF)	0
T2. Activo2. BB	60.757	61,588	(+ INF)	0
T2. Activo2. BS	63.608	64,251	(+ INF)	0
T2. Activo3. SS	81.265	82,030	(+ INF)	0
T2. Activo3. SB	66.045	66.712	(+ INF)	EPS
T2. Activo3. BB	60.757	61,588	(+ INF)	EPS
T2. Activo3. BS	63.608	64,251	(+ INF)	EPS
T2. Activo4. SS	81.265	82,030	(+ INF)	EPS
T2. Activo4. SB	66.045	66.712	(+ INF)	0
T2. Activo4. BB	60.757	61,588	(+ INF)	0
T2. Activo4. BS	63.608	64,251	(+ INF)	0

Tabla 12: Datos Numéricos de los Activos Retenidos.

BIBLIOGRAFÍA

1. Alois Geyer, William T. Ziemba. (2000). The Innovest Austrian Pension Fund Financial Planning Model InnoALM. *Operations Research* .

2. Andras Prékopa . (1995). *Mathematics and Its Applications* (Vol. 324). (A. T. Centre/or Mathematics and Computer Science, Ed.) New Jersey, U.S.A. : Rutgers Center/or Operations Research, Rutgers University, New Brunswick.

3. Artzer et all. (1999). *Coherent Mesures of Risk Matthematical Finance.* Frorida, USA: University of Florida Press.

4. Avriel y Williams . (1969). *The Value of Information and Stochastic Programming.* Priceton , New Jesey , USA: Priceton University Press.

5. Beale y Dantzig. (1955). *Linear Programming Under Uncentainty, Management* (Vol. 1). USA.

6. Beltratti et all . (1999). Scenario modeling for the management of international bond portfolios. *Annals of Operations Research , 85*, 227–247.

7. Birge, Louveaux . (1997). *A Multicut Algotithm for Two-Stage stochastic Lineal Programing*, European Journal of Operational Research, 34, 384-392.

8. Birge, Louveaux. (2011). *Introduction to Stochastic Programming.* South Woodlawn, Chicago, USA: University of Chicago Press.

9. Black, Derman, Toy. (1990). One-Factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Option . *Financial Analisis , 46*, 33.

10. Bodie, O. S. (1996). *Securing Employer-Based Pensions: An International Perspective.* Pensilvania, USA: University of Pennsylvania Press .

11. Bogentoft et all. (2001). Asset Liability Manegement for Pension Funds Using CVaR Constranis. *Journal of Risk an Finance* , 49, 57-71.

12. Boulier, J-F., Trussant, E,Florens, D. (1995). A dynamic model for pension funds management. European Journal of Operational Research *,5*, 361-384.

13. Bradley & Crane . (1972). *A Dynamic Model for Bond Portfolio Management.* Cambridge, Massachusetts, Estados Unidos: On line.

14. Cariño & Ziemba. (1998). *Formulation of the RussellYasuda Kasai financial planning model* (Vol. 46). Cambridgeshire, London, UK: Cambridge University Press.

15. Carvalho, F. S. (2012). Variable Models for prediction and adjust of multivariate data. *Workshop of Young Researchers in Mathematics 2012* (págs. 18-25). Madrid: Universidad Complutense.

16. Dantzig , VanSlyke . (1964). *Upper Bounded Techinics For Linear Programming.* USA: Princeton , New Jersey, USA: Princeton University Press.

17. Dantzig, G. B. and Wolf . (1960). *Decomposition Principle for Linear Programming Problems* . Princeton , New Jersey, USA: Princeton University Press.

18. Davis, E. Philip. (1995). *Pension Funds: Retirement Income Security and Capital Markets-An International Perspective.* Oxford, England , UK: Clarendon Press.

19. Dempster . (2001). *Global Asset Liability Manegement .* Cambridge , London, Uk: Cambridge Press.

20. Dert. (1995). *Asset Liability Management For Pension funds: A Multistage Chance Constranined Programming Approch .* Phd Tesis, Erasmus Universiy Rotterdan.

21. Dučapova, Hurt, Stepan. (2003). *Stochastic Modeling in Economics and Finance* (Vol. 75). (F. University, Ed.) New York , USA: Kluer Academic .

22. Dučapova, J. (1995). *: Scenario-based stochastic programs: Strategies for deleting scenarios.* Luxemburg: IIASA Luxemburg Press.

23. Ermoliev, Yu. M. and A. I. Yastremki. (1979). *Stochastic Models and Methods in Economic .* Moscow, Russian Federation.

24. Frank J. Fabozzi, S. M. (2005). Market experience with modeling for defined-benefit pension funds: evidence from four countries. *Journal of pension economics and finance* ,60, 313-327.

25. Frank J. Fabozzi, S. V. (2012). *Fixed Income Securities.* New Jersey, USA: John Wiley & Sons.

26. Gordan Žitković. (2012). An example of a stochastic equilibrium with incomplete markets. *Finance and Stochastics , 16*, 177-206.

27. Harry Markowitz. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance , 7* (1), 77-91.

28. Hoevenaars . (2008). Strategic Asset Allocation and Asset Liability Management. Phd thesis, University of Mastricht.

29. Horne, Wachowicz Jr. (2008). *Fundamentals of Financial Management* (Vol. 13). USA: Prentice Hall Limeted.

30. http://stoprog.org/resources.php#textbooks. (2015).

31. http://tucson.sie.arizona.edu/SPX, 2.

32. http://tucson.sie.arizona.edu/SPX.

33. http://www.conozcalabvc.com.

34. http://www.ecom.cat/pdfRecursos/Ecom_recursos_188.pdf. (2016). Madrid, España.

35. http://www .INE.es (2011). Madrid, España: On line .

36. https://www.boe.es.

37. Huang, Ertinsky y Ziemba . (1975). *Sharp Bounds on the Value of Perfect Imformation.* Columbia, New York , USA: Columbia University Press.

38. http://www.OCDE.es, (2007). *Perspectivas OCDE: España Políticas para una Recuperación Sostenible.* (Online, Ed.)

39. http://www.OCDE.es, OCDE. (2009). *Evaluación del Tercer Pilar del Sistema de Pensiones .*

40. http://www.OCDE.com, Global Pension Statistics. (2009). *Pension fund assets struggle to return to pre-crisis levels.* Bruselas , UE.

41. http://www.OCDE.com, G. P. (2014). Bruselas, UE.

42. http://www.seg-social.es. (2002). *Artículo 1 del Real Decreto Legislativo 1/2002, de 29 de noviembre, por el que se aprueba el Texto Refundido de la Ley de Planes y Fondos de Pensiones, en adelante Ley de Planes y Fondos de Pensiones.* Madrid, España: Mininisterio de Empleo y Seguridad Social.

43. http://www.seg-social.es. (22 de 03 de 2015). (M. d. Social, Editor)

44. Jacek Gondzio, Roy Kouwenberg. (2001). *High-performance computing for asset-liability management.* (INFORMS, Ed.) Erasmus University Rotterdam, Erasmus Center for Financial Economics *, 49*.

45. John M. Mulvey, G. G. (2000). *An Asset and Liability Management System for Towers Perrin-Tillinghast.* Interfaces, 30,96-144.

46. John M. Mulvey, Robert J. Vanderbei, Stavros A. Zenios. (1995). *Robust Optimization of Large-Scale Systems.* Operations Research , 43 (2), 264-281.

47. Kalberg et all. (1981). *An algorithm for portfolio revision: Theory, computation, algorithm and empirical results* . (I. R. Shultz, Ed.) Berkeley, California, USA: Columbia University Press.

48. Kall & Wallace. (1994). Stochastic Programming:. *Stochastic programming , 83* (3), 2,21,36-46.

49. Karl Siegmann, 2005. *Pension Fund Policy Volatility*, De Economist, 156,73-93.

50. Kjetil Høyland, Stein Wallace. (2001). *Generating scenario trees for multistage decision problems. Management Science , 47* ,295-307.

51. Kusy, M.I,W.T Ziemba. (1986.). *A bank asset and liability management model. Management Science , 34* (3), 356-376.

52. Mulvey, J. B. (2006). *Dynamic Financial Analysis for Multinational Insurance Companies.* Amsterdam, Holanda: Handbook of Asset and Liability Management, Elsevier.

53. Mulvey, J. M., and Simsek, K. D. (2002). *"Rebalancing Strategies for Long-Term Investors," in Computational Methods in Decision-Making, Economics and Finance.* Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

54. Mulvey,J.M., and H.Vladimirou. (1992). *Stochastic network programming for financial planning problems. Management Science , 38*, 1642-1664.

55. P. Hilli, M. K. (2007). *A stochastic model for assets and liabilities of a pension institution.* New York, USA: Section Colloquium.

56. Pardo, A. (2008). *Economia Financiera: Operaciones y Mercados*, Valencia, España,Univesitad de Valencia on line.

57. R. C. Grinold . (1986). Infinite Horizon Stochastic Programs . *Journal on Control and Optimizacion , 24*, 1246-1260.

58. Robert C. Merton. (1969). Lifetime Portfolio Selection Under Uncertainty: the Continuous-Time Case . *The Review of Economics and Statistics , 51* (3), 247-257.

59. Rockafellar , Uryasev , 2002. (s.f.). *Conditional value-at-risk for general loss distributions*. Journal of Banking & risk and Finance,2, 21–41.

60. Roy Kouwenberg, 2001. *Scenario generation and stochastic programming models for asset liability management.* European Journal of Operational Research *, 134* (2), 282-296.

61. Rudolf, M., and W. Ziemba, 2002. Intertemporal Surplus Manegement. Journal of Economic Dynamics and Control, (975–990) .

62. Shapiro, D. Dencheva and A. Ruszczynski. (2009). *Lectures on stochastic programming: Modeling and Theory.* Philadelphia, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics.

63. Sibrand Drijver. (2005). *Asset Liability Management for Pension Funds using Multistage Mixed-integer Stochastic Programming.* Rotterdan, Netherland: Labyrint Publications, Phd Tesis .

64. Stephen A. Ros. (1976). *The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing.* Journal of Economic Theory*,14,33-63* .

65. The United Nations Secretariat. (2014). *Population Division.* Division of the Department of Economics and Social Affairs.

66. Van Ewisk. (2005). *Reform of occupational pensions in the Netherlands.* Rotterdan, Netherland: De Economist.

67. Vasicek, Oldrich A. . (1977). *An Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates.* Jounal of Financial Analisys Economics, 5, 177-188

68. Wallace & Ziemba. *Stochastic Modeling and Optimization.* En *Applications of Stochastic Programming.* British Columbia, Canada: University of British Columbia Press.

69. William F. Sharpe. (1964). Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *The Journal of Finance , 19* (3), 425-442.

70. Wotson, W. T. (2016). *Accounting Management.* New York, USA.

71. Zapatero, Sudaresan . (1997). *Asset Allocation and Incentive Retirement of Pensions Plans.* USA: Handbook of Fixed Income.

72. Zenios, S. A, & W. T. Ziemba. (2004). *Asset Liability management.* North Holland, Netherland: Handbooks in Finance.

73. Zenios & Ziemba . (2005). *Asset and Liability Management: Applications and Case Studies.* Philadelphia, Misisipi, USA: Handbooks in Finance.

74. Zenios. (1995). *Parallel Computing in Network Optimization* (Vol. 7). (H. i. Scienc, Ed.) Amsterdan, Netherland: Elsevier Science B.V.

75. Ziemba & Vickson . (1975). *Stochastic Optimization Models in Finance.* New York, USA.

76. Ziemba, W.T. and Mulvey, J. (1998). *World Wide Asset and Liability Modeling.* Cambridge, London, UK: Cambridge Univ. Press.

77. Zimba et al. (2002). *Stochastic Programming* . Canada : University of Britsh Columbia .